8. *Ивлев Е.Т.* О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ /Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1984. Вып. 15. С. 32-37.

9. *Бочилло Г.П.* Об одном классе распределений Λ_n на многообразии гиперплоских элементов пространства P_n // Там же, 1989. Вып. 20. С. 19-23.

G. P. B o c h i l l o

ON SOME GEOMETRIC IMAGES, ASSOCIATED WITH THE BASIC FUNDAMENTAL TENSOR OF DISTRIBUTION

Regular distribution on a manifold of all hyperplanar elements x={A, α } of projective space P_n generates a field of nondegenerated tensor { Λ^n_{pq} }– of the basic fundamental tensor of distribution. Here A is a point and α is a hyperplane of projective space incident to it. Concepts of invariant 1-families and subspaces, fixed elements of linear transformations and also reciprocal subsurfaces (relative to B.F.T.D) connected with B.F.T.D are considered and a relation is established between them. Examples of such concepts for the concrete values n=4,5 are brought.

УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРОЙКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ

О. А. Б ы к а н о в а

(Московский педагогический государственный университет)

В работе строится геометрия следующей тройки распределений Δ^m, $\tilde{\Delta}^m$, Δ^n на гладком многообразии M_N, где N=m+n, $m \le n$. Построены частичные связности на главном расслоении $H^1(M_N)$ и $H^2(M_N)$. Исследование проводится методом дифференциальных продолжений с применением леммы Картана в инвариантных терминах теории расслоений дифференциально-геометрических объектов различных порядков, их структурных форм и структурных уравнений для этих форм.

Выделение пары распределений (Δ^m, Δ^n) на многообразии M_N приводит к следующей редукции расслоения реперов первого порядка $H^1(M_N)$:

$$\omega^a_i = H^a_{ik}\omega^k + H^a_{ib}\omega^b,\ \omega^i_a = H^i_{ak}\omega^k + H^i_{ab}\omega^b, \tag{1}$$

где $\omega^{\alpha}, \omega^{\alpha}_{\beta}, \ldots \left(\alpha, \beta, \ldots = \overline{1, N}\right)$ - структурные линейные формы расслоения реперов соответствующего порядка, внешние дифференциалы которых удовлетворяют известным уравнениям [1]. Дифференциальное продолжение (1) с применением леммы Картана приводит к новой группе геометрических объектов, ассоциированных с расслоениями реперов $H^3(M_N)$ третьего порядка, приводящую к редукции $\tilde{H}^2(M_N) \subset H^2(M_N)$, на которой H^a_{ik}, H^i_{ab} приводятся к кососимметрическому виду и становятся компонентами тензора неголономности, $H^a_{ib}=0$, $H^i_{ak}=0$. При этом остаются независимыми формы ω^i, ω^a, ω^i_k, ω^a_b, ω^i_{kl}, ω^a_{bc}- структурные формы редукции $\tilde{H}^2(M_N)$. Для названных структурных форм доказана основная

Теорема. На редукции $\tilde{H}^2(M_N)$ формы ω^i, ω^a, ω^i_k, ω^a_b удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\begin{gathered} d\omega^i = \omega^l \wedge \omega^i_l + H^i_{ab}\omega^a \wedge \omega^b, d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + H^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j, \\ d\omega^i_k = \omega^l_k \wedge \omega^i_l + \omega^l \wedge \omega^i_{kl} + 2H^a_{kl}H^i_{ab}\omega^l \wedge \omega^b + H^i_{adk}\omega^a \wedge \omega^d, \\ d\omega^a_b = \omega^d_b \wedge \omega^a_d + \omega^d \wedge \omega^a_{bd} + 2H^k_{bd}H^a_{kl}\omega^d \wedge \omega^l + H^a_{klb}\omega^k \wedge \omega^l; \\ \Delta H^a_{ik} = H^a_{ikl}\omega^l + H^a_{ikd}\omega^d, \ \Delta H^i_{ab} = H^i_{abl}\omega^l + H^i_{abd}\omega^d, \end{gathered} \tag{2}$$

где H^a_{ik}, H^i_{ab} - тензоры неголономности распределений Δ^m, Δ^n. В рамках структуры, определяемой парой (Δ^m, Δ^n), характеризуется третье распределение $\tilde{\Delta}^m$. Если аннулятором распределения Δ^m являются формы ω^a, Δ^n - формы ω^i, тогда аннулятором распределения $\tilde{\Delta}^m$ будет являться система форм $\tilde{\omega}^a = \omega^a - \lambda^a_i\omega^i$, где матрица $\left\|\lambda^a_i\right\|$ (геометрический объект, задающий третье распределение) имеет максимальный ранг m и удовлетворяет структурным уравнениям

$$\Delta\lambda^a_i \equiv d\lambda^a_i + \lambda^b_i\omega^a_b - \lambda^a_j\omega^j_i = \lambda^a_{ij}\omega^j + \lambda^a_{ib}\omega^b. \tag{3}$$

Они продолжаются на основе структурных уравнений (2)

$$\Delta\lambda^a_{ij} - \lambda^a_k\omega^k_{ij} = \lambda^a_{ijk}\omega^k + \lambda^a_{ijb}\omega^b, \ \Delta\lambda^a_{ib} + \lambda^d_i\omega^a_{bd} = \lambda^a_{ibk}\omega^k + \lambda^a_{ibd}\omega^d. \tag{4}$$

Выясняя геометрический смысл объектов λ^a_{ij}, λ^a_{ib}, получаем, в частности, что λ^a_{ib} определяет частичную связность в расслоении $H^1_n(M_N)$ подреперов e_a вертикального распределения Δ^n.

Теорема. Формы $\tilde{\omega}^a$, $\tilde{\omega}^a_b = \omega^a_b - \lambda^a_{ib}\omega^i$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$\begin{gathered} d\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge \left[\tilde{\omega}^a_b + \lambda^a_i H^i_{db}\omega^d\right] + \overline{H}^a_{kl}\omega^k \wedge \omega^l, \\ d\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^d_b \wedge \tilde{\omega}^a_d + \tilde{\omega}^d \wedge \overline{\omega}^a_{bd} + R^a_{kbl}\omega^k \wedge \omega^l, \end{gathered} \tag{5}$$

в силу которых определена частичная связность Γ_v - параллельное перенесение вертикальных подреперов с формами связности $\tilde{\omega}^a_b$ вдоль интегральных кривых распределения $\tilde{\Delta}^m$ (кривых, аннулирующих $\tilde{\omega}^a$), где $R^a_{kbl} = \lambda^d_k\left(2H^s_{bd}H^a_{sl} - \tilde{\lambda}^a_{lbd} + \lambda^a_{ib}\lambda^c_l H^i_{cd}\right) + \tilde{\lambda}^a_{kbl} + H^a_{klb}$ - тензор Γ_v, $\overline{H}^a_{kl} = H^a_{kl} + \lambda^a_{[kl]} - \lambda^a_{[l|b}\lambda^b_{k]} + \lambda^a_i\lambda^d_l\lambda^b_k H^i_{db}$ - тензор неголономности распределения $\tilde{\Delta}^m$.

В рамках структуры тройки распределений, помимо рассмотренной выше так называемой вертикальной связности Γ_v, построим следующие дифференциально-геометрические объекты γ^k_{ij}, Γ_g.

Ассоциированную систему распределения $\tilde{\Delta}^m$ запишем в виде $\omega^A = \lambda^A_i\omega^i$, $\omega^{\hat{A}} = \lambda^{\hat{A}}_i\omega^i$, где λ^A_i - базисный минор матрицы $\left\|\lambda^a_i\right\|$. Так как $\det\left\|\lambda^A_i\right\| \neq 0$, то можно определить функции σ^i_A, взаимные к системе функций λ^A_i, т.е. $\sigma^i_A\lambda^B_i = \delta^B_A$, $\sigma^i_A\lambda^A_j = \delta^i_j$. Функции σ^i_A удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta\sigma^i_A - \lambda^{\hat{B}}_k\sigma^k_A\sigma^i_B\omega^B_{\hat{B}} = -\lambda^B_{lj}\sigma^i_B\sigma^l_A\omega^j - \lambda^B_{la}\sigma^i_B\sigma^l_A\omega^a. \qquad (6)$$

На многообразии M_N рассмотрим функции $\mu^{\hat{A}}_A = \lambda^{\hat{A}}_i\sigma^i_A$, определяющие систему

$$\Delta\mu^{\hat{A}}_A - \mu^{\hat{A}}_B\mu^{\hat{B}}_A\omega^B_{\hat{B}} + \omega^{\hat{A}}_A = \mu^{\hat{A}}_{Aj}\omega^j + \mu^{\hat{A}}_{Aa}\omega^a. \qquad (7)$$

Функции $\gamma^k_{ij} = \sigma^k_A\lambda^A_{ij}$ являются объектом аффинной связности в случае, если $\mu^{\hat{A}}_{Ai}=0$. Компоненты $\mu^{\hat{A}}_{Ai}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta\mu^{\hat{A}}_{Ai} + \mu^{\hat{B}}_A\mu^{\hat{A}}_{Bi}\omega^B_{\hat{B}} = \mu^{\hat{A}}_{Aij}\omega^j + \mu^{\hat{A}}_{Aia}\omega^a.$$

Левые части этих уравнений линейны и однородны относительно $\mu^{\hat{A}}_{Ai}$, поэтому обращение их в нуль носит инвариантный характер и выделяет класс распределений D^m. В этом случае γ^k_{ij} образуют геометрический объект горизонтальной аффинной связности. Обозначим через Γ_g ограничение этой связности вдоль горизонтальных векторных полей. Формами связности Γ_g служат формы $\tilde{\omega}^j_i = \omega^j_i + \gamma^j_{ik}\omega^k$, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \tilde{\omega}^i_k + \gamma^i_{kl}\omega^l \wedge \omega^k + H^i_{bc}\omega^b \wedge \omega^c,$$

$$d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^l_j \wedge \tilde{\omega}^i_l + \left[\bar{\gamma}^i_{jks} + \gamma^l_{jk}\gamma^i_{ls}\right]\omega^s \wedge \omega^k + \left[2H^a_{jl}H^i_{ab} - \bar{\gamma}^i_{jlb}\right]\omega^l \wedge \omega^b + \gamma^i_{jk}H^k_{ad}\omega^a \wedge \omega^d.$$

Выясним условие параллельности распределения D^m в связности Γ_v, т.е. условия постоянства объекта $\{\mu_A^{\hat{A}}\}$ относительно связности Γ_v. Система дифференциальных уравнений функций $\mu_A^{\hat{A}}$ относительно форм связности Γ_v имеет вид:

$$\Delta_{\Gamma_v}\mu_A^{\hat{A}} - \mu_B^{\hat{A}}\mu_A^{\hat{B}}\tilde{\omega}_{\hat{B}}^B + \tilde{\omega}_A^{\hat{A}} = \sigma_A^i\left(S_{ij}^{\hat{A}} - \mu_B^{\hat{A}}S_{ij}^B\right)\omega^j,$$

где $S_{ij}^a = \lambda_{ij}^a + \lambda_{ib}^a\lambda_j^b - \lambda_{jb}^a\lambda_i^b$.

Таким образом, условие искомой параллельности: $S_{ij}^{\hat{A}} = \mu_B^{\hat{A}}S_{ij}^B$. Рассмотрим функции $\tilde{\gamma}_{ij}^k = \sigma_A^k S_{ij}^A$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений вида

$$\Delta\tilde{\gamma}_{ij}^k - \omega_{ij}^k - \lambda_l^{\hat{B}}\sigma_B^k\tilde{\gamma}_{ij}^l\omega_{\hat{B}}^B = \tilde{\gamma}_{ijp}^k\omega^p + \tilde{\gamma}_{ija}^k\omega^a.$$

В случае m=n $\tilde{\gamma}_{ij}^k$ образуют геометрический объект горизонтальной аффинной связности, ограничение которой вдоль горизонтальных векторных полей обозначим $\tilde{\Gamma}_g$.

Предложение. Функции $K_{ij}^l = \sigma_a^l\left(\lambda_{ib}^a\lambda_j^b - \lambda_i^b\lambda_{jb}^a\right)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений $\Delta K_{ij}^l = 0$ (при ω^i=0, ω^a=0) и, значит, тензор K_{ij}^l является тензором аффинной деформации связностей Γ_g, $\tilde{\Gamma}_g$.

Библиографический список

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М., 1979. Т. 9.

O. A. B y k a n o v a

GEOMETRY OF A SPECIAL TRIPLE OF DISTRIBUTIONS ON A SMOOTH MANIFOLD

A triple of distributions of a smooth manifold M_N is investigated, among which two are transversal to the third and are situated in a common position: $\Delta^m, \tilde{\Delta}^m, \Delta^n$,where N=m+n, $m \le n$. Forms $\omega^a, \omega^i, \tilde{\omega}^a = \omega^a - \lambda_i^a\omega^i$ are annihilators respectively of the distributions Δ^m, Δ^n, $\tilde{\Delta}^m$, where matrix $\left\|\lambda_i^a\right\|$ (which is an geometric object defining $\tilde{\Delta}^m$) has the maximal rank m. We obtain structural equations of structural forms of reduction $\tilde{H}^2(M_N)$ by using method of differential continuation. We obtain a partial connection Γ_V, defined by λ^a_{ib}, by explaining a geometric meaning of objects $\lambda^a_{ij}, \lambda^a_{ib}$ (which are differential continuations of λ^a_i).

УДК 514.75

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСОЙ $H_r(L)$

С. Ю. Волкова

(*Калининградское ВВМУ*)

Работа является продолжением исследований гиперполос $H_r(L)$ [1]. Показано, что каждая характеристика $\chi_{n-r-1} \subset H_r(L)$ несет однопараметрическое семейство F-плоскостей. Найдены поля оснащающих объектов, присоединяющих внутренним инвариантным образом оснащения в смысле Картана для *F*-распределения, *L*-распределения, χ-распределения, ассоциированных с гиперполосой $H_r(L)$. Введен в рассмотрение пучок нормалей 2-го рода для оснащающей *M*-плоскости. Приведены примеры построения однопараметрических пучков π-структур (неголономных композиций Нордена) для χ-распределения и Ъ - распределения данной гиперполосы $H_r(L)$.

Во всей работе придерживаемся терминологии и обозначений статьи [1]. Схема использования индексов следующая:

$$I, J, K = \overline{1, n};\ p, q, s, t = \overline{1, r};\ i, j, k = \overline{r+1, m};$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1};\ u, v, w = \overline{r+1, n-1};\ a, b, c = \overline{1, m}.$$

Символом “$\equiv$“ обозначаем сравнение по модулю базисных форм ω^p.

1. Однопараметрический пучок плоскостей F_{n-m-1}. Рассмотрим гиперполосу $H_r(L)$ проективного пространства P_n, заданную в репере 1-го порядка $\{A_J\}$ [1]. С гиперполосой $H_r(L)$ ассоциируется поле F -плоскостей [1], т.е. в каждой точке A_0 базисной поверхности V_r гиперполосы определяется F-плоскость $F_{n-m-1}(A_0) = \chi_{n-r-1}(A_0) \cap N_{n-m}(A_0)$ - пересечение характеристики $\chi_{n-r-1}(A_0)$ гиперполосы и нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$ оснащающей M-плоскости $M_m(A_0) = [T_r(A_0), L_{m-r}(A_0)]$. Плоскость $F_{n-m-1}(A_0) = [A_0, F_\alpha] = [A_0, A_\alpha + \nu_\alpha^i A_i]$ в локальном репере $\{A_J\}$ задается уравнениями:

$$x^n = x^p = 0,\ x^i - \nu_\alpha^i x^\alpha = 0, \tag{1}$$

где величины $\{\nu_\alpha^i\}$ образуют квазитензор:

$$\nabla \nu_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \nu_{\alpha p}^i \omega^p. \tag{2}$$

Используя объекты [1, § 3], получаем в общем случае два линейно независимых охвата квазитензора $\{\nu_\alpha^i\}$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка: