Список литературы

I.Кретов М.В.Дифференцируемые отображения,ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.-Калининград,I98I (рукопись депонирована в ВИНИТИ 22 июня I98Iг.,№3003-8I Деп.).

2.Кретов М.В.О некоторых подклассах дифференцируемого отображения,ассоциированного с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.-Калининград,I982 (рукопись депонирована в ВИНИТИ 3I мая I982г.,№ 2657-82 Деп.).

3.Кретов М.В. Об асимптотических направлениях комплексов гиперквадрик в аффинном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, I983,Вып.I4,с.36-40.

4.Лаптев Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.о-ва,I953,2,с.275-382.

5.Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.Геометрия,I963,I965,с.65-I07 .

6.Андреев Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,I974,Вып.5 с.6-24.

7.Андреев Б.А.О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,I973,Вып.3,I973,с.6-I9.

8.Кретов М.В.О связностях,ассоциированных с комплексом центральных гиперквадрик в аффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,I98I,Вып.I2,с.35-39.

9.Кретов М.В.О некоторых подклассах комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве-Калининград,I98I(рукопись депонирована в ВИНИТИ I7 ноября I98I,№5272-8I Деп.).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I5 I984

УДК 5I4.75

В.С.М а л а х о в с к и й

О МНОГООБРАЗИЯХ ФИГУР В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В n-мерном однородном пространстве рассматривается многообразие фигур,порождающее с помощью фундаментального объекта порядка k многообразие индуцированных фигур.Подробно исследуются конгруэнции линейчатых квадрик с индуцированным многообразием распавшихся фокальных коник.

Пусть E_n - n-мерное однородное пространство с фундаментальной r-членной группой Ли G ,определяемой инвариантными формами $\theta^s(u, du)$ и структурными постоянными C^s_{pq} $(p,q,s=1,2,\ldots,r)$. m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур $\mathcal{F}$ ранга N определяется пфаффовыми уравнениями

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i, \ (i,j,k=1,\ldots,m), \qquad (1)$$

где $\Omega^J \equiv da^J - f^J_s(a)\,\theta^s(u,du)$ -структурные формы фигуры $\mathcal{F}$. Осуществляя последовательные продолжения системы (1), получим внутренние фундаментальные объекты многообразия $\mathfrak{M}_m$ различных порядков

$$\Gamma_1 = \{a^J, \lambda^a_i\}, \ldots, \Gamma_\nu = \{a^J, \lambda^a_i, \ldots, \lambda^a_{i_1\ldots i_\nu}\}. \qquad (2)$$

О п р е д е л е н и е. Фигура Φ пространства E_n называется k-индуцированной фигурой по отношению к фигуре $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}_m$, если геометрический объект фигуры Φ охватывается фундаментальным объектом Γ_k порядка k многообразия $\mathfrak{M}_m$.

При $k=0$ получаем просто индуцированную фигуру,по отношению к которой $\mathcal{F}$ является индуцирующей фигурой [1]. При $k\geq 1$ многообразие $\mathfrak{M}$ простых фигур целесообразно задавать не системой уравнений (I), а эквивалентной ей системой, в которой структурные формы индуцированной порядка K фигуры Φ включены в число независимых первичных форм многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Это дает возможность применить к многообразию $\mathfrak{M}_m$ простых фигур такой же способ исследования, как и к многообразию индуцирующих фигур [1]. Целесообразно рассматривать такие многообразия не в общем репере, а в репере, включающем индуцированную фигуру Φ. Например, прямолинейная конгруэнция в P_3 индуцирует на каждом луче пару точек - фокусы луча. Помещая две вершины репера в эти точки, мы не только упрощаем систему пфаффовых уравнений конгруэнции, но и получаем возможность исследовать более глубоко сами фокальные поверхности. Аналогичная картина возникает при исследовании конгруэнций коник и квадрик в P_3. Оказывается удобным совмещать часть вершин репера с фокальными точками коники или квадрики. Такая канонизация репера особенно удобна при рассмотрении конгруэнций коник и квадрик со специальными свойствами фокальных поверхностей (их вырождение, кратность и т.п.).

В качестве примера рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию невырожденных линейчатых квадрик, каждая квадрика которой имеет пару пересекающихся фокальных прямых [2], причем поверхность, описанная точкой пересечения этих прямых, не вырождается. Назовем такую конгруэнцию конгруэнцией T_0. Отнесем конгруэнцию T_0 к реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, где A_0 - точка пересечения фокальных прямых, A_3 - произвольная точка квадрики $Q\in T_0$, отличная от A_0, а A_i ($i,j,k=1,2$) - точки пересечения с фокальными прямыми прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через точку A_3. При надлежащей нормировке вершин уравнение квадрики Q принимает вид:

$$\mathcal{F}\equiv x^1x^2-x^0x^3=0. \qquad (3)$$

Пара фокальных прямых A_0A_i является 1-индуцированной фигурой. Обозначим через ω_α^β ($\alpha,\beta=0,1,2,3$) - компоненты инфинитезимальных перемещений репера R. Формы Пфаффа ω_0^3, $\omega_i^3-\omega^j$, ω_i^j, Ω, ω_3^0, Ω^i, где

$$\Omega=\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3,\ \Omega^i=\omega_j^0-\omega_3^i,\ \omega^i=\omega_0^i, \qquad (4)$$

являются структурными формами квадрики $Q\in T_0$. Здесь и в дальнейшем $i\neq j$; и по индексам i и j суммирование не производится. Так как A_0A_i — фокальные прямые, то

$$\omega_0^3=0,\quad \omega_i^3-\omega^j=0,\quad \omega_i^j=0. \qquad (5)$$

В силу невырожденности поверхности (A_0)

$$\omega^1\wedge\omega^2\neq 0. \qquad (6)$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции T_0 состоит из уравнений (5) и уравнений

$$\Omega=0,\ \Omega^i=\lambda\omega^i,\ \omega_3^0=m_k\omega^k,\ d\lambda+2(\lambda\omega_0^0+\omega_3^0)=0. \qquad (7)$$

Т е о р е м а 1. Конгруэнции T_0 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замыкая систему (7), получим:

$$\Delta m_k\wedge\omega^k=0, \qquad (8)$$

где

$$\Delta m_i=dm_i+m_i(2\omega_0^0-\omega_i^i-\omega_3^3)-\lambda\omega_3^j. \qquad (9)$$

Анализируя замкнутую систему (5), (7), (8), убеждаемся в справедливости теоремы.

Так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & m_1\\ 0 & \lambda & m_2\end{pmatrix}$$

равен двум, то

$$\lambda\neq 0. \qquad (10)$$

Т е о р е м а 2. Фокальное многообразие квадрики $Q\in T_0$ [2] состоит из прямых A_0A_i и неинцидентной им точки

$$M=\frac{1}{\lambda}m_1m_2A_0-m_2A_1-m_1A_2+\lambda A_3. \qquad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$d\mathcal{F}=(2\theta-\omega_0^0-\omega_3^3)\mathcal{F}+x^3\left((\lambda x^2+m_1x^3)\omega^1+(\lambda x^1+m_2x^3)\omega^2\right), \qquad (12)$$

где θ –форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом. Следовательно, фокальное многообразие квадрики $Q\in T_0$ определяется системой уравнений

$$x^1x^2-x^0x^3=0,\ x^3(\lambda x^2+m_1x^3)=0,\ x^3(\lambda x^1+m_2x^3)=0, \qquad (13)$$

дающей прямые A_0A_i и точку $\mathcal{M}$.

Из (8),(9),(10) следует, что можно так канонизировать репер, чтобы

$$\lambda=1,\ m_1=0,\ m_2=0. \qquad (14)$$

Тогда вершина A_3 совместится с фокальной точкой $\mathcal{M}$. Деривационные формулы репера R приводятся к виду:

$$\begin{cases} dA_0=\omega^kA_k,\ dA_i=(b_j\omega^i+(1+a)\omega^j)A_0+\omega_i^iA_i+\omega^jA_3, \\ \qquad dA_3=(a\omega^1+b_1\omega^2)A_1+(b_2\omega^1+a\omega^2)A_2. \end{cases} \qquad (15)$$

Т е о р е м а 3. Конгруэнция T_0 обладает следующими свойствами:

1. Поверхность (A_0) является квадрикой с прямолинейными образующими A_0A_i

2. Прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) гармонична поверхности (A_0). Фокусы луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2.

3. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответствуют. Прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) сопряжена поверхности (A_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим квадрику

$$\varphi\equiv x^1x^2-x^0x^3+\frac{1}{2}(x^3)^2=0, \qquad (16)$$

содержащую точку A_0 и прямые A_0A_i. Так как $d\varphi=2\theta\varphi$, то это – инвариантная квадрика.

2. Фокусы луча A_1A_2 и торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются соответственно формулами

$$\mathcal{F}_\varepsilon=\sqrt{b_1}A_1+\varepsilon\sqrt{b_2}A_2,\quad \varepsilon^2=1, \qquad (17)$$

$$b_2(\omega^1)^2-b_1(\omega^2)^2=0. \qquad (18)$$

3. Утверждение следует из того, что торсы прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) также определяется уравнением (18).

Рассмотренный пример показывает, что при исследовании многообразий фигур важное значение имеет не только выделение для каждой фигуры индуцированных фигур различных порядков, но и канонизация репера, позволяющая включать индуцированные фигуры в репер и исследовать многообразия с заданными свойствами индуцированных ими многообразий.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.– Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР,1969,т.2,с.179–206.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.С. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.–Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР,1974,т.6,с.113–134.