определяется формулой

$$\int\limits_{\xi} = \int\limits_{W} \dots \int < \omega, \; \xi >, \qquad (5)$$

где W -параметрическое пространство поверхности $\mathcal{N}$. В частности, если ξ касательные m -векторы к поверхности $\mathcal{N}$, то интеграл в правой части формулы (5) есть поверхностный интеграл в обычном смысле. Пусть $\varphi \in GL(2^n)$, тогда

$$\int\limits_{(\Phi^{-1})^T \xi} \varphi(\omega) = \int\limits_{\xi} \omega, \qquad (6)$$

в частности, если $\theta \in O(2^n)$, то

$$\int\limits_{\theta(\xi)} \theta(\omega) = \int\limits_{\xi} \omega. \qquad (7)$$

В приложениях часто встречается случай, когда $J \in O(2^n)$-инволюция (в частности, например, оператор Ходжа $*$). Тогда из (7) легко получить

$$\int\limits_{J(\xi)} \omega = \int\limits_{\xi} J(\omega). \qquad (8)$$

Интегрирование, определенное формулой (5), легко обобщается на обобщенные цепи:

$$\sigma = \bigoplus_{\nu} a_{\nu} (\mathcal{N}_{\nu}, \xi_{\nu}), \qquad (9)$$

где $\mathcal{N}_{\nu}$ могут иметь разную размерность. По аддитивности

$$\int\limits_{\sigma} \omega = \sum_{\nu} a_{\nu} \int\limits_{\xi_{\nu}} \omega. \qquad (10)$$

Библиографический список

1. С т е р н б е р г С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412с.

2. Б у р л а к о в М.П. Клиффордовы расслоения/ Чечено-Ингушский университет. Грозный, 1984. Деп. в ВИНИТИ 10.05.84, № 2984.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

ПСЕВДОКОНФОРМНОЕ И ПОЧТИ КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ В E_3

М.А. Г д о я н
(Кироваканский пединститут)

В работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии гладкого частичного псевдоконформного или почти конформного отображения трехмерной сферы S_3 в евклидово пространство E_3 с использованием графика V_3^* отображения.

1. Рассмотрим евклидовы пространства E_4 и E_3 как вполне ортогональные подпространства в собственно евклидовом пространстве E_7, имеющие одну общую точку O, которая является центром трехмерной сферы S_3 с радиусом r, лежащей в E_4. Будем изучать дифференцируемое взаимно однозначное отображение $f: S_3 \to E_3$, которое переводит область $\Omega \subset S_3$ в некоторую область $\bar{\Omega} \subset E_3$. Если точка X_1 описывает область Ω, то точка $X_2 = f(X_1)$ описывает область $\bar{\Omega}$, а точка X с радиус-вектором $\vec{X} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2$, где $\vec{X}_1 = \vec{OX}_1$, $\vec{X}_2 = \vec{OX}_2$, опишет поверхность V_3^*, называемую графиком отображения f [1].

Пусть $R^{X_1} = \{X_1, \vec{e}_i, \vec{e}_4\}$, $R^{X_2} = \{X_2, \vec{e}_{4+i}\}$ $\quad (i,j = 1,2,3)$ соответствующие подвижные реперы в E_4 и E_3, причем R^{X_1}-ортонормированный, $\vec{e}_4 \parallel \vec{X}_1$, $\vec{e}_i \in T(X_1)$ (касательное пространство к сфере S_3 в точке X_1), а $\vec{e}_{4+i} = f_* X_1 (\vec{e}_i)$ ($f_* X_1$ -индуцированное отображение) и R^{X_1} построен на касательных к линиям основания σ_3 отображения [3]. В точке $X \in V_3^*$ возникает репер $R^X = \{X, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_4, \vec{\varepsilon}_{4+i}\}$, где $\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{4+i}$, $\vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_4$,

$\vec{\varepsilon}_{4+i} = \vec{e}_i - \gamma_{ik} \bar{\gamma}^{kt} \vec{e}_{4+t}$, $\quad \gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, $\bar{\gamma}_{ij} = \vec{e}_{4+i} \vec{e}_{4+j}$, $g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \vec{\varepsilon}_j$;

деривационные формулы этих реперов имеют вид:

$$d\vec{X}_1 = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^4 \vec{e}_4, \; d\vec{e}_4 = \omega_4^i \vec{e}_i; \qquad (1)$$

$$d\vec{X}_2 = \bar{\omega}^i \vec{e}_{4+i}, \; d\vec{e}_{4+i} = \bar{\omega}_i^j \vec{e}_{4+j}; \qquad (2)$$

$$d\vec{X} = \theta^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \theta^j_i \vec{e}_j + \theta^4_i \vec{e}_4 + \theta^{4+j}_i \vec{e}_{4+j},$$
$$d\vec{e}_4 = \theta^i_4 \vec{e}_i + \theta^{4+j}_4 \vec{e}_{4+j}, \tag{3}$$
$$d\vec{e}_{4+i} = \theta^j_{4+i} \vec{e}_j + \theta^4_{4+i} \vec{e}_4 + \theta^{4+j}_{4+i} \vec{e}_{4+j}.$$

Отображение f задается дифференциальными уравнениями $\omega^i = \bar{\omega}^i$. Уравнение $\omega^4 = 0$ есть дифференциальное уравнение сферы S_3, а поверхность V_3^* определяется системой уравнений $\theta^4 = 0$, $\theta^{4+t} = 0$, продолжение которой приводит к соотношениям $\theta^4_i = b^4_{ij}\theta^j$, $\theta^{4+t}_i = b^{4+t}_{ij}\theta^j$, где $b^4_{ij} = b^4_{ji} = -\frac{1}{r}\delta_{ij}$, $b^{4+t}_{ij} = b^{4+t}_{ji}$ (см[1]). Так как, по предположению, репер R^{X_1} (R^{X_2} или R^X) построен на касательных к линиям сети σ_3 ($\bar{\sigma}_3 = f(\sigma_3)$ или σ_3^* на V_3^*), то будем говорить, что соответствующее многообразие S_3 ($f(S_3)$ или V_3^*) отнесено к основанию отображения $f: S_3 \to E_3$.

2. Рассмотрим такое отображение $f: S_3 \to E_3$, когда выполняются условия: $\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \alpha$, при этом само отображение f не обязательно конформное [2]; мы назовем его псевдоконформным отображением, а функцию α -коэффициентом псевдоконформности. С учетом $d\bar{\gamma}_{ij} = \bar{\gamma}_{ik}\bar{\omega}^k_j + \bar{\gamma}_{kj}\bar{\omega}^k_i$ мы приходим к матрицам:

$$(K) = \begin{bmatrix} b^5_{11} & -b^5_{11} & b^5_{33} \\ b^6_{11} & -b^6_{11} & b^6_{33} \\ b^7_{11} & b^7_{22} & b^7_{33} \end{bmatrix}, \quad (T) = \begin{bmatrix} b^5_{23} & b^6_{23} & -b^6_{11} \\ b^6_{23} & -b^5_{23} & b^5_{11} \\ b^7_{23} & b^7_{13} & b^7_{12} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

С применением этих матриц можно доказать следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Если поверхность V_3^* отнесена к основанию псевдоконформного отображения $f: S_3 \to E_3$, то фокусы F_1, F_2 нормали $[X_2, \vec{e}_7]$ к распределению $\bar{\Delta}_2(\vec{e}_5, \vec{e}_6)$ в точке X_2 гармонически разделяют точки X_2 и Z (центр средней кривизны распределения $\bar{\Delta}_2$). Точки F_1, F_2 и Z совпадают тогда и только тогда, когда какие-либо две из них совпадают.

Т е о р е м а 2. Если поверхность V_3^* отнесена к основанию псевдоконформного отображения $f: S_3 \to E_3$, то скалярная кривизна распределения $\bar{\Delta}_2$ (несущего сопряженную сеть), равна нулю тогда и только тогда, когда один из фокусов F_1 и F_2 -несобственная точка.

Т е о р е м а 3. Если поверхность V_3^* отнесена к основанию псевдоконформного отображения $f: S_3 \to E_3$, то первая поляра точки T_n^* относительно фокусной квадрики Q_2^* к распределению $\Lambda_2^*(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и одномерная нормаль $[X, \vec{e}_4]$ графика V_3^* в точке X пересекаются в двукратном псевдофокусе F_4^α ($\vec{F}_4^\alpha = \vec{X} - r(1+\alpha)\vec{e}_4$) прямой $[X, \vec{e}_4]$, причем прямая $[X, \vec{e}_4]$ касается квадрики Q_2^* в этой точке F_4^α. Если Q_2^* центральная, то она является конусом с вершиной F_4^α.

3. Применим подвижной репер, построенный на касательных к линиям сети σ_3 (основания отображения), и потребуем, чтобы уравнение $\omega^3 = 0$ было вполне интегрируемым, а отображение $f: S_3 \to E_3$ было псевдоконформным ($\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \alpha$). При этом отображение f не обязательно будет конформным, и мы назовем его почти конформным. Таким образом, если f почти конформно, то

$$\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \alpha, \quad a^3_{12} = a^3_{21} \quad (\omega^k_i = a^k_{ij}\omega^j). \tag{5}$$

Интегральные многообразия уравнения $\omega^3 = 0$ будут двумерными V_2, лежащими на гиперсфере S_3, причем V_2 несет ортогональную сеть из линий ω^1, ω^2, входящую в основание отображения σ_3. В отображении f имеем $f(V_2) = \bar{V}_2$, и на графике V_3^* мы будем иметь двумерные поверхности V_2^*. Поэтому можно рассмотреть отображение $f: V_2 \to \bar{V}_2$. Его графиком будет поверхность V_2^*. Имея в виду $(g_{jj} - g_{ii})a^j_{ik} = g_{jj}b^{4+j}_{ik} + g_{ii}b^{4+i}_{jk}$ и (5), мы приходим к матрицам:

$$(K) = \begin{bmatrix} b^5_{11} & -b^5_{11} & b^5_{33} \\ b^6_{11} & -b^6_{11} & b^6_{33} \\ b^7_{11} & b^7_{22} & b^7_{33} \end{bmatrix}, \quad (T) = \begin{bmatrix} 0 & b^6_{23} & -b^6_{11} \\ b^6_{23} & 0 & b^5_{11} \\ b^7_{23} & b^7_{13} & b^7_{12} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Отсюда с учетом вида матриц (6), формулы (34) из работы [1], получим

$$\bar{a}^j_{ik} = a^j_{ik} - \frac{g_{jj}}{g_{jj} - 1} b^{4+j}_{ik}, \quad a^3_{12} = a^3_{21}, \quad \bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \alpha.$$

Мы находим

$$\bar{a}^3_{12} = \frac{\alpha}{g_{33}-1}\, a^3_{12} . \qquad (7)$$

Т е о р е м а 4. Если поверхность V^*_3 отнесена к основанию почти конформного отображения $f: S_3 \to E_3$, то имеет место (7) и f переводит сеть линий кривизны σ_2 на V_2 в сеть линий кривизны $\bar{\sigma}_2 = f(\sigma_2)$ тогда и только тогда, когда $b^7_{12}=0$.

Т е о р е м а 5. Если поверхность V^*_3 отнесена к основанию почти конформного отображения $f: S_3 \to E_3$ и $b^7_{12} = 0$, то для того, чтобы сеть σ^*_3 была 3-сопряженной системой, необходимо и достаточно, чтобы f переводило 3-сопряженную систему σ_3 на S_3 в 3-сопряженную систему $\bar{\sigma}_3 = f(\sigma_3)$. При $b^7_{12}=0$ сети $\sigma_3, \bar{\sigma}_3, \sigma^*_3$ одновременно 3-сопряженные системы, если хотя бы одна из них - 3-сопряженная система.

Библиографический список

1. Г д о я н М.А.//Межвуз.сб.науч.тр. Ереван, 1985. Вып.3. С.126-137.

2. Г д о я н М.А.// Межвуз.сб.науч.тр. Ереван, 1986. Вып.4. С.57-60.

3. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств //Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970. № 374. С.41-51.

УДК 514.75

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ТРЕХСОСТАВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

М.Ф.Г р е б е н ю к
(Киевское авиационное училище)

В данной работе инвариантным методом продолжений и охвато[в] Г.Ф.Лаптева [1] строятся поля фундаментальных геометрических объектов распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве A_{n+1}. С помощью построенных полей фундаментальных геометрических объектов присоединены к $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределению внутренним инвариантным образом два однопараметрических пучка соприкасающихся гиперквадрик. В работе используются терминология и обозначения, введенные в работе [2].

1. Применяя первое и второе продолжения системы дифференциальных уравнений распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ в репере $\mathcal{R}^1$, а также другие результаты работы [2], последовательно строим следующие объекты:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{r} A^p_{ip}, \quad \nabla \hat{a}_i = \hat{a}_{i\varkappa}\, \omega^\varkappa,$$

$$\hat{a}_\alpha = \frac{1}{r} A^p_{\alpha p}, \quad \nabla \hat{a}_\alpha - \hat{a}_i \omega^i_\alpha = \hat{a}_{\alpha\varkappa}\, \omega^\varkappa,$$

$$r_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda_{pq} - \Lambda_{qp}), \ \nabla r_{pq} + r_{pq}\,\omega^{n+1}_{n+1} = r_{pq\varkappa}\, \omega^\varkappa,$$

$$a_{pqs} = \frac{1}{2}(\Lambda_{pqs} + \Lambda_{qps}), \nabla a_{pqs} + a_{pqs}\,\omega^{n+1}_{n+1} - (a_{rq}\Lambda_{ps} + a_{pr}\Lambda_{qs} + a_{pq}\Lambda_{rs})\,\omega^r_{n+1} \equiv 0,$$

$$A_{pqs} = \frac{1}{3} a_{(pqs)}, \nabla A_{pqs} + A_{pqs}\,\omega^{n+1}_{n+1} - a_{(pq} a_{s)r}\,\omega^r_{n+1} - \frac{1}{3} r_{r(p} a_{qs)}\,\omega^r_{n+1} \equiv 0,$$

$$\hat{a}_t = a^{pq} A_{pqt}, \ \nabla_\delta \hat{a}_t - \frac{r+2}{3} r_{st}\,\pi^s_{n+1} - (r+2)\, a_{st}\,\pi^s_{n+1} = 0,$$

$$B_{pqs} = (r+2) A_{pqs} - a_{(pq}\hat{a}_{s)}, \ \nabla_\delta B_{pqs} + B_{pqs}\,\pi^{n+1}_{n+1} = 0,$$