УДК 514.75

О.М. Омельян

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

О КРИВИЗНЕ 1-го ТИПА, ИНДУЦИРОВАННОЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Построена кривизна 1-го типа групповой связности 1-го типа, индуцированной композиционным оснащением распределения плоскостей.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I,\ldots=\overline{1,n};\ i,\ldots=\overline{1,m};\ a,\ldots=\overline{m+1,n}.$$

1. В n-мерном проективном пространстве P_n продолжим исследование распределения NS_n [1, 2] m-мерных центрированных плоскостей P^*_m, которое определяется уравнениями $\omega^a_i=\Lambda^a_{iJ}\omega^J$, причем компоненты фундаментального объекта 1-го порядка распределения удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^I:

$$\Delta\Lambda^a_{iJ}-\delta^a_J\omega_i\equiv 0;\quad \Delta\Lambda^a_{iJ}=d\Lambda^a_{iJ}-\Lambda^a_{jJ}\omega^j_i-\Lambda^a_{iK}\omega^K_J+\Lambda^b_{iJ}\omega^a_b.$$

Ранее было произведено [3; 4] композиционное оснащение распределения NS_n, состоящее в задании на нем аналогов плоскостей Картана и нормалей 2-го рода Нордена

$$C_{n-m-1}\colon P^*_m\oplus C_{n-m-1}=P_n,\ N_{m-1}\colon A\oplus N_{m-1}=P^*_m,$$

причем оснащающие плоскости определены совокупностями точек

$$B_a=A_a+\lambda_a^i A_i+\lambda_a A,\ B_i=A_i+\lambda_i A.$$

Объект $\lambda=\{\lambda_a^i,\ \lambda_a,\ \lambda_i\}$ является оснащающим квазитензором, содержащим 3 подквазитензора λ_a^i, $\{\lambda_a^i,\ \lambda_a\}$ и λ_i. Выражения для дифференциалов точек B_a и B_i имеют вид:

$$dB_a=(\ldots)_a^b B_b+t_{aJ}^i\omega^J B_i+(t_{aI}-\lambda_i t_{aI}^i)\,\omega^I A,$$

$$dB_i=(\ldots)_i^j B_j+(\Lambda_{iJ}^a+\delta_J^a\lambda_i)\omega^J B_a+t_{iJ}\omega^J A,$$

где компоненты тензора $t=\{t_{aJ}^i, t_{aI}, t_{iJ}\}$ неспециальных смещений [3] являются функциями от фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda^1=\{\Lambda_{iJ}^a\}$ распределения NS_n, оснащающего квазитензора λ и совокупности его пфаффовых производных $\lambda'=\{\lambda_{aJ}^i, \lambda_{aI}, \lambda_{iJ}\}$, т.е. $t=t(\Lambda^1,\lambda,\lambda')$. Тензор t содержит ряд простейших, простых и составных подтензоров, причем равенство нулю тензора t геометрически означает неподвижность пары плоскостей (C_{n-m-1}, P_{n-1}).

2. С распределением NS_n ассоциируется [2] главное расслоение $G(NS_n)$, базой которого служит само распределение, а типовым слоем — подгруппа стационарности G центрированной плоскости P_m^*. В этом расслоении способом Г.Ф. Лаптева [4] задана групповая связность с помощью формы $\tilde\omega=\omega-\Gamma_K\omega^K$, причем $\tilde\omega=\{\tilde\omega_j^i, \tilde\omega_i, \tilde\omega_b^a, \tilde\omega_a^i, \tilde\omega_a\}$. Компоненты объекта связности $\Gamma=\{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma_{bi}^a,$, $\Gamma_{bc}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ab}^i, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [2], в частности:

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkI}\omega^I, \ \ \Delta\Gamma^i_{ja} - \Gamma^i_{jk}\omega^k_a + \omega^i_{ja} = \Gamma^i_{jaI}\omega^I,$$

$$\Delta\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} = \Gamma_{ijJ}\omega^J, \ \Delta\Gamma_{ia} - \Gamma_{ij}\omega^j_a + \Gamma^j_{ia}\omega_j + \omega_{ia} = \Gamma_{iaJ}\omega^J, \quad (1)$$

$$\Delta\Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{biJ}\omega^J, \ \ \Delta\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{bi}\omega^i_c + \omega^a_{bc} = \Gamma^a_{bcI}\omega^I.$$

Объект групповой связности Γ содержит ряд подобъектов [2]. Компоненты объекта кривизны $R = \{R^i_{jkl}, R^i_{jka}, R^i_{jab}, ...\}$ групповой связности Γ выражаются [2] через компоненты объекта Γ и их пфаффовы производные, например:

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]}, \ \ R^i_{jab} = \Gamma^i_{j[ab]} - \Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]},$$

$$R^i_{jka} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jak} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka}) - \Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{la]}, \quad (2)$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках, поэтому $R^i_{j(kl)} = 0$, $R^i_{j(ab)} = 0$. Объект кривизны R связности Γ является тензором и содержит ряд подтензоров, соответствующих подобъектам объекта связности Γ.

3. В работе [3] было доказано, что распределение NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в расслоении $G(NS_n)$ групповую связность 1-го типа $\overset{01}{\Gamma}$ с компонентами, определяемыми, в частности, по формулам

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j, \ \ \overset{1}{\Gamma}_{ij} = \Lambda^a_{ij}\lambda_a - \lambda_i\lambda_j,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi} = -\Lambda^a_{ji}\lambda^j_b - \delta^a_b\lambda_i. \quad (3)$$

Построим кривизну 1-го типа, порожденную групповой связностью 1-го типа, т. е. получим охваты компонент тензора кривизны $\overset{01}{R}$ объектом групповой связности $\overset{01}{\Gamma}$. Из выражений

(2), определяющих компоненты тензора кривизны R, видно, что для этого сначала нужно найти охваты пфаффовых производных объекта Г. Используя дифференциальные уравнения (1), выражения (3) и аналогичные им для компонент объекта связности $\overset{01}{\Gamma}$, найдем, что его пфаффовы производные охватываются следующим образом:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl} = (\Lambda^a_{jkl} + \Lambda^a_{jb}\Lambda^b_{kl})\lambda^i_a + \Lambda^a_{jk}\lambda^i_{al} - \delta^i_j\lambda_{kl} - \delta^i_k\lambda_{jl},$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jka} = (\Lambda^a_{jka} + \Lambda^b_{jc}\Lambda^c_{ka})\lambda^i_b + \Lambda^b_{jk}\lambda^i_{ba} - \delta^i_j\lambda_{ka} - \delta^i_k\lambda_{ja}, \qquad (4)$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jak} = \Lambda^b_{jak}\lambda^i_b + \Lambda^b_{ja}\lambda^i_{bk} - \delta^i_j(\lambda_{ak} - \lambda_{lk}\lambda^l_a - \lambda^l_{ak}\lambda_l) + \lambda^i_{ak}\lambda_j + \lambda^i_a\lambda_{jk},$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jab} = \Lambda^c_{jab}\lambda^i_c + \Lambda^c_{ja}\lambda^i_{cb} - \delta^i_j(\lambda_{ab} - \lambda_{kb}\lambda^k_a - \lambda^k_{ab}\lambda_k) + \lambda^i_{ab}\lambda_j + \lambda^i_a\lambda_{jb}, \ldots$$

Возвращаясь к формулам (2), задающим тензор кривизны R, видим, что для получения выражений охватов компонент тензора $\overset{01}{R}$ необходимо:

1) найти альтернации соответствующих пфаффовых производных (4), учитывая симметрии компонент Λ^a_{iJK} фундаментального объекта 2-го порядка $\Lambda^2 = \{\Lambda^1, \Lambda^a_{iJK}\}$ распределения NS_n по двум последним индексам;

2) вычислить свертки соответствующих компонент объекта $\overset{01}{\Gamma}$ и Λ, а также найти альтернированные произведения соответствующих компонент объекта связности $\overset{01}{\Gamma}$.

Таким образом, выражения охватов для компонент тензора кривизны $\overset{01}{R}$ имеют следующий вид:

$$\overset{0}{R}{}^{i}_{jkl}=\Lambda^{a}_{j[k}t^{i}_{al]}-\delta^{i}_{j}t_{[kl]}-\delta^{i}_{[k}t_{jl]},\ \ \overset{0}{R}{}^{a}_{bij}=-\Lambda^{a}_{k[i}t^{k}_{bj]}-\delta^{a}_{b}t_{[ij]},$$

$$\overset{0}{R}{}^{i}_{jab}=\Lambda^{c}_{j[a}t^{i}_{cb]}-\delta^{i}_{j}(t_{[ab]}-\lambda^{k}_{[a}t_{kb]}-t^{k}_{[ab]}\lambda_{k})+t^{i}_{[ab]}\lambda_{j}+\lambda^{i}_{[a}t_{jb]}, \quad (5)$$

$$\overset{0}{R}{}^{a}_{bcd}=-\Lambda^{a}_{i[c}t^{i}_{bd]}-\delta^{a}_{b}(t_{[cd]}-\lambda_{i}t^{i}_{[cd]}-\lambda^{i}_{[c}t_{id]})-\delta^{a}_{[c}t_{bd]},\ldots$$

Выражения охватов для остальных компонент тензора кривизны определяются по формулам, аналогичным (5), но имеют более громоздкий вид. Итак, мы построили кривизну 1-го типа $\overset{01}{R}$, индуцированную композиционным оснащением распределения NS_n.

4. Из формул (5) видно, что в выражения охватов компонент тензора кривизны $\overset{01}{R}$ входят компоненты тензора t неспециальных смещений. Сформулируем несколько предложений, характеризующих обращение в нуль подтензоров тензора t.

Предложение 1. *Ограничение смещений нормали 2-го рода Нордена* N_{m-1} *в гиперплоскости Бортолотти* $P_{n-1}=C_{n-m-1}\oplus N_{m-1}$ $(t_{iJ}=0)$ *дает упрощение выражений компонент тензора кривизны* $\overset{01}{R}$*, например:*

$$\overset{0}{R}{}^{i}_{jkl}=\Lambda^{a}_{j[k}t^{i}_{al]},\ \ \overset{0}{R}{}^{i}_{jab}=\Lambda^{c}_{j[a}t^{i}_{cb]}-\delta^{i}_{j}(t_{[ab]}-t^{k}_{[ab]}\lambda_{k})+t^{i}_{[ab]}\lambda_{j},$$

$$\overset{0}{R}{}^{a}_{bij}=-\Lambda^{a}_{k[i}t^{k}_{bj]},\ \ \overset{0}{R}{}^{a}_{bcd}=-\Lambda^{a}_{i[c}t^{i}_{bd]}-\delta^{a}_{b}(t_{[cd]}-\lambda_{i}t^{i}_{[cd]})-\delta^{a}_{[c}t_{bd]},\ldots$$

Предложение 2. *Ограничение смещений плоскости Картана до нормали 1-го рода Нордена* $N_{n-m}=C_{n-m-1}\oplus A$ $(t^{i}_{aJ}=0)$ *вызывает упрощение выражений компонент тензора кривизны* $\overset{01}{R}$*, в частности:*

$$\overset{0}{R}{}^i_{jkl} = -\delta^i_j t_{[kl]} - \delta^i_{[k} t_{jl]}, \quad \overset{0}{R}{}^i_{jab} = -\delta^i_j (t_{[ab]} - \lambda^k_{[a} t_{kb]}) + \lambda^i_{[a} t_{jb]},$$

$$\overset{0}{R}{}^a_{bij} = -\delta^a_b t_{[ij]}, \quad \overset{0}{R}{}^a_{bcd} = -\delta^a_b (t_{[cd]} - \lambda^i_{[c} t_{id]}) - \delta^a_{[c} t_{bd]}, \ldots$$

Предложение 3. *Ограничение смещений плоскости Картана в гиперплоскости Бортолотти* ($t_{aI} - \lambda_i t^i_{aI} = 0$) *вызывает упрощение выражений компонент тензора кривизны* $\overset{01}{R}$*, в частности:*

$$\overset{0}{R}{}^i_{jab} = \Lambda^c_{j[a} t^i_{cb]} + \delta^i_j \lambda^k_{[a} t_{kb]} + t^i_{[ab]} \lambda_j + \lambda^i_{[a} t_{jb]},$$

$$\overset{0}{R}{}^a_{bcd} = -\Lambda^a_{i[c} t^i_{bd]} + \delta^a_b \lambda^i_{[c} t_{id]} - \delta^a_{[c} t_{bd]}, \ldots$$

Предложение 4. *Ограничение смещений плоскости Картана в нормали 1-го рода Нордена и нормали 2-го рода Нордена в гиперплоскости Бортолотти* ($t_{iJ} = 0, \; t^i_{aJ} = 0$) *влечет упрощение выражений компонент тензора кривизны* $\overset{01}{R}$*, например:*

$$\overset{0}{R}{}^i_{jkl} = 0, \quad \overset{0}{R}{}^i_{jab} = -\delta^i_j t_{[ab]}, \quad \overset{0}{R}{}^a_{bij} = 0, \quad \overset{0}{R}{}^a_{bcd} = -\delta^a_b t_{[cd]} - \delta^a_{[c} t_{bd]}, \ldots$$

Предложение 5. *Неподвижность плоскости Картана* ($t^i_{aJ} = 0$, $t_{aI} = 0$) *вызывает упрощение выражений компонент тензора кривизны* $\overset{01}{R}$*, в частности:*

$$\overset{0}{R}{}^i_{jkl} = -\delta^i_j t_{[kl]} - \delta^i_{[k} t_{jl]}, \quad \overset{0}{R}{}^i_{jab} = -\delta^i_j \lambda^k_{[a} t_{kb]} + \lambda^i_{[a} t_{jb]}, \ldots$$

Теорема. *Неподвижность плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти* (t=0) *влечет обращение в нуль тензора кривизны 1-го типа* $\overset{01}{R} = 0$.

Замечание. В работе [5] введены обобщенные тождества Риччи для компонент объекта кривизны $\{\overset{0}{R}{}^{i}_{jkl}, \overset{01}{R}_{ijk}\}$ цетропроективной подсвязности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^{i}_{jk}, \overset{01}{\Gamma}_{ij}\}$ и показано, что они выполняются в случае голономного распределения или при выполнении условий $t^{i}_{aj} = 0$, $t_{ai} = 0$, характеризующих специальные поля плоскостей Картана.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

2. *Омельян О. М.* Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во КГУ, 2002. №33. С. 74—78.

3. *Омельян О. М.* Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей // Межд. конф. по геом. и анализу. Пенза, 2003. С. 63—69.

4. *Омельян О. М.* Пучки связностей 1-го и 2-го типов, индуцированные композиционным оснащением распределения плоскостей // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2005. С. 94—101.

5. *Омельян О. М.* Об обобщенных тождествах Риччи для центропроективной кривизны 1-го типа на распределении // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2007. Т. 36. С. 65—67.

O. Omelyan

ABOUT CURVATURE OF THE 1-ST TYPE INDUCED ON THE DISTRIBUTION OF PLANES IN THE PROJECTIVE SPACE

In many-dimensional projective space the distribution of planes is considered. The curvature of the 1-st type of group connection of the 1-st type, induced by the composite clothing of distribution of planes is constructed.