УДК 524.852

И. В. Фомин, С. В. Червон, С. В. Крюков

ДИНАМИКА КИРАЛЬНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ФАНТОМНО-КАНОНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Новейшие результаты космических и наземных миссий WMAP, Planck, BICEP2 широко обсуждаются научным сообществом и указывают на необходимость исследования новых инфляционных моделей, отличных от базовой модели инфляции, основанной на одном самодействующем скалярном поле. В настоящей работе мы рассматриваем инфляционную модель, основанную на киральной космологической модели, которая учитывает различные формы кинетического взаимодействия фантомного и канонического поля. Наше исследование определяет динамику и взаимодействие полей в тот короткий промежуток времени на стадии ранней инфляции, когда потенциал взаимодействия полей остается постоянным (как это рассматривалось в рамках модели «новой» инфляции). Мы указываем общий алгоритм решения динамических уравнений на киральные (скалярные) поля и исследуем специальные случаи, когда удается найти решения в элементарных функциях.

The latest results of space and ground-based mission WMAP, Planck, BICEP2 discussed widely by the scientific community and indicate the need for research on new models of inflation, other than the basic model of inflation, based on a single self-interacting scalar field. In this paper we consider the inflationary model based on chiral cosmological model, which takes into account the various forms of kinetic interaction between the phantom and the canonical field. This study determines the dynamics and interaction of the fields in the short time at the stage of early inflation, when the potential fields of cooperation remains constant (as seen in the model of the "new" inflation). We present a general algorithm for solving dynamic equations on chiral (scalar) fields and examine special cases when it is possible to find a solution in elementary functions.

Ключевые слова: инфляция, скалярное поле, точные решения, гравитационные волны.

Keywords: inflation, scalar field, exact solutions, gravitational waves.

Введение

Большой набор наблюдательных данных новейших астрофизических миссий [1; 2] позволяет с высокой степенью точности говорить о наличии космологической инфляции [3] на начальной стадии эволюции Вселенной. Теория инфляции [4] хорошо согласуется с полученными наблюдательными данными по поляризации, анизотропии реликтового излучения, а также по крупномасштабной структуре Вселенной [5]. Однако подобное сопоставление проводится, как правило, по инфляционной модели, основанной на одном скалярном поле. Как отмечается в работе [3], существующая инфляционная модель с массивным скалярным полем согласуется с данными Planck 15 [1]. Однако данные наблюдений новейших миссий стимулируют развитие новых концепций и новых широких классов инфляционных моделей.

Наши исследования ведутся в рамках киральной космологической модели (нелинейной сигма-модели с потенциалом взаимодействия). Сигма-модели благодаря наличию внутреннего пространства (так называемого пространства целей) способны охватить широкий класс моделей, обобщая модели с квинтэссенцией, как с фантомными, так и с квинтомными полями [6—11]. Мы рассматриваем случай с двумя скалярными полями и плоским потенциалом, так как потенциал остается постоянным во время инфляционной стадии [3].

Уравнения фантомно-канонической модели

В работе [11] рассматривался случай двухкомпонентной киральной космологической модели (ККМ), в которой первое поле является каноническим, а второе — фантомным с компонентами метрики кирального пространства $h_{11} = 1$; $h_{22} < 0$. В данной работе мы решаем задачу с двумя полями и кинетическим взаимодействием между ними, когда первым полем выступает фантомное, а вторым — каноническое. Таким образом, компоненты киральной метрики соответствуют условию $h_{11} = -1$; $h_{22} > 0$.

Уравнения Эйнштейна в пространственно-плоской Вселенной в метрике Фридмана — Робертсона — Уокера (ФРУ) для данной модели можно представить в виде [12]

$$H^2 = \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2 + V\right], \tag{1}$$

$$\dot{H} = \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2\right]. \tag{2}$$

Полевые уравнения в метрике ФРУ принимают вид

$$-3H\dot{\phi} - \ddot{\phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial \phi}\dot{\psi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{3}$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \dot{h}_{22}\dot{\psi} + h_{22}\ddot{\psi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial \psi}\dot{\psi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0. \tag{4}$$

Экспоненциальное поведение масштабного фактора $a \propto e^{Ht}$, $H \approx \mathrm{const}$ играет важнейшую роль в моделях космологической инфляции [13]. В (1)—(4) мы предполагаем, что для очень коротких временных промежутков, таких как период инфляции, потенциал может быть плоским и принят за константу $V = \Lambda = const$. В этом случае уравнения Эйнштейна имеют решение

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{3\Lambda}t\right), \tag{5}$$

$$a = a_*\left[\mathrm{ch}\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right]^{1/3},\ a_* = \mathrm{const}, \tag{6}$$

и мы можем проанализировать динамику полей.

Следующей нашей задачей является решение динамических уравнений киральных полей с учетом полученного решения (5) — (6) для уравнений Эйнштейна (1) — (2). Найдем уравнение состояния киральных полей для полученного решения (5). Для этого выражаем эффективное давление $p_\phi = K - \Lambda$ и плотность $\rho_\phi = K + \Lambda$, где $K = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2$. Таким образом, уравнение состояния принимает вид [11; 12]

$$\omega = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = -1 - \frac{2}{\mathrm{sh}^2\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)}. \tag{7}$$

Используя уравнения (5) — (6), можно получить следующие асимптоты:

$$\omega_{t\to 0} \to -1,\ \omega_{t\to\infty} \to -\infty. \tag{8}$$

Следовательно, можно утверждать, что фантомное поле имело сильное влияние в эпоху космологической инфляции и доминировало на поздних стадиях эволюции Вселенной в рассматриваемой модели без материи и радиации.

Точные решения фантомно-канонической модели

Рассмотрим аналог SO(3) — симметричной нелинейной сигма-модели [12] с различным выбором компонент метрики кирального пространства.

1. Параметризация $h_{11} = -1$; $h_{22} = \phi^2$.

Используя метод поиска точных решений, предложенный в [11], получим кинетическую энергию первого поля:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{C_1^2}{\phi^2} + \Lambda\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)}\right)^2, \tag{9}$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Взяв первый интеграл (4), получим для второго поля

$$|\dot{\psi}| = \frac{|C_1|}{\phi^2\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)}. \tag{10}$$

Разделим переменные в (9) и вычислим интеграл в правой части:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{C_1^2}{2\phi^2} + \Lambda}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3\Lambda}\,\mathrm{arctg}\left(\exp\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right) + C_2, \tag{11}$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Взяв интеграл от левой части, получим решение для первого поля:

$$\phi = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Y + C_2 - \frac{1}{2}\frac{C_1^2}{\Lambda}}, \tag{12}$$

$$Y = \mathrm{arctg}\left(\exp\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right).$$

Переписав (10) с учетом (12), получим

$$\psi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Y + C_2 - \frac{1}{2}\frac{C_1^2}{\Lambda} \right), \tag{13}$$

$$Y = \mathrm{arctg}\left(\exp\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right).$$

Аналогичным способом можно получить решения и для других случаев с фантомно-канонической параметризацией, где первое поле является фантомным, а второе — каноническим, причем благодаря тому, что $h_{22} > 0$, уравнение (11) имеет действительное решение для большинства случаев, чего нельзя сказать о случае, когда первым полем является каноническое, а вторым — фантомное [11].

2. Параметризация $h_{11} = -1$; $h_{22} = \sin^2(\phi)$.

Решим систему уравнений (1)—(4). После подстановки $h_{22} = \sin^2(\phi)$ получим следующую систему уравнений:

$$H^2 = \frac{\varkappa}{3}\left[-\dot{\phi}^2 + \sin^2\phi\dot{\psi}^2 + \Lambda\right], \tag{14}$$

$$\dot{H} = -\varkappa\left[-\dot{\phi}^2 + \sin^2\phi\dot{\psi}^2\right], \tag{15}$$

$$-\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} - \sin 2\phi\dot{\psi}^2 = 0, \tag{16}$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\phi} + 2\mathrm{ctg}\,\phi\dot{\phi}\dot{\psi} = 0. \tag{17}$$

Уравнения (14)—(17) имеют решение

$$\phi = -\arccos\left(\frac{\sqrt{C_1^2 + 2\Lambda}}{\sqrt{2\Lambda}} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin\left(\mathrm{sh}\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right)\right) + C_2 \right), \tag{18}$$

$$\psi - \psi_0 = \frac{1}{2a_*}\left(\ln\left| \frac{C_1}{\sqrt{2\Lambda}} \mathrm{tg}(Z) + 1 \right| \right), \tag{19}$$

$$Z = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathrm{arctg}\left(\mathrm{sh}\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right) + C_2, \tag{20}$$

где ψ_0 константа интегрирования.

3. Параметризация $h_{11} = -1$; $h_{22} = e^{\phi}$.

Выполняя аналогичные действия, получаем решение

$$\phi = \ln\left(\frac{1}{8\Lambda}\left[\exp\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Y + C_2 \right) - 2C_1^2 \right] \right), \tag{21}$$

$$Y = \mathrm{arctg}\left(\exp\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right);$$

$$\psi = 2\sqrt{2\Lambda}\ln\left(1-\frac{2C_1^2}{\exp\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Y+C_2\right)}\right), \qquad (22)$$

$$\Upsilon = \operatorname{arctg}\left(\exp\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)\right).$$

Космологические возмущения

В течение инфляции квантовые флуктуации скалярного поля будут создавать возмущения метрики. В линейном порядке для Фурье-мод скалярных v_k и тензорных u_k возмущений записываются уравнения Муханова — Сасаки [14]

$$\frac{d^2v_k}{d\eta^2}+\left(k^2-\frac{1}{z}\frac{d^2z}{d\eta^2}\right)v_k=0, \qquad (23)$$

$$\frac{d^2u_k}{d\eta^2}+\left(k^2-\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\eta^2}\right)u_k=0, \qquad (24)$$

где $z=a\dot{\phi}/H$, k — волновое число, η — конформное время.

Из уравнений (23)—(24) определяют спектры мощности и спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений.

Расчеты параметров космологических возмущений для моделей с одним скалярных полем на основе точных решений фоновой динамики рассматривались в работе [15].

Важной характеристикой космологической эпохи является пересечение радиуса Хаббла для случая, когда сопутствующий волновой вектор $k=aH$, где значение H берется в момент пересечения горизонта. В течение инфляции сопутствующая хаббловская длина $(aH)^{-1}$ убывает. Следовательно, данный сопутствующий масштаб k^{-1} может быть меньше радиуса Хаббла перед инфляцией. В некоторое время, в течение инфляции, он будет пересекать горизонт, то есть $k^{-1}=(aH)^{-1}$. И в последующее время, когда сопутствующая хаббловская длина станет вновь расти, данный масштаб будет пересекать горизонт снова в соответствии с теорией космологических возмущений.

В работах [16; 17] получены формулы для расчета основных космологических параметров на пересечении радиуса Хаббла $(k=aH)$ в случае точных решений уравнений динамики скалярного поля.

В соответствии с результатами, полученными в работах [16; 17], определим основные параметры космологических возмущений на пересечении радиуса Хаббла $(k=aH)$:

$$r=-4\frac{\dot{H}}{H^2}=\frac{12}{\operatorname{sh}^2\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)}, \qquad (25)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = -\frac{H^4}{8\pi^2 \dot{H}} = \frac{\Lambda}{72\pi^2}\left(\frac{\operatorname{th}^4\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)}{\operatorname{th}^2\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)-1}\right), \tag{26}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{H^2}{2\pi^2} = \frac{\Lambda \operatorname{th}^2\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)}{6\pi^2}, \tag{27}$$

$$n_{\mathcal{S}}(k) - 1 = \frac{4\dot{H} - \frac{H\ddot{H}}{\dot{H}}}{\dot{H} + H^2} = \frac{6\left[\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)+1\right]}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)+2}, \tag{28}$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = \frac{2\dot{H}}{\dot{H} + H^2} = \frac{6}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{3\Lambda}t\right)+2}, \tag{29}$$

где r — тензорно-скалярное отношение, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k), \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k), n_{\mathcal{S}}$ и $n_{\mathcal{G}}$ — спектры мощности и спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений.

Заключение

Исследования фантомно-канонической модели (которая, в свою очередь, является частным случаем двухкомпонентной киральной космологической модели), основанные на поиске ее точных решений, показали, что свобода в выборе параметров внутренней метрики пространства целей может привести к точным решениям, для которых определяются спектральные параметры и спектр мощности космологических возмущений.

Благодарности.
И. В. Фомин признателен за поддержку грантов РФФИ № 16-02-00488 А и № 16-08-00618 А.

Список литературы

1. *Ade P. A. R., Aghanim N., Arnaud M. et al. (Planck Collaboration).* Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. 2016. Vol. 594. URL: https://arxiv.org/pdf/1502.01589.pdf (дата обращения: 04.04.2018).

2. *Ade P. A. R., Aikin R. W., Barkats D. et al. (BICEP2 Collaboration).* Detection of *B*-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2 // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, № 24. URL: https://arxiv.org/pdf/1403.3985.pdf (дата обращения: 04.04.2018).

3. *Linde A.* Inflationary Cosmology after Planck 2013. URL: https://arxiv.org/pdf/1402.0526.pdf (дата обращения: 04.04.2018).

4. *Liddle A. R., Lyth D. H.* Cosmological inflation and large scale structure. Cambridge, 2000.

5. *Baumann D., Peiris H.* Cosmological Inflation: Theory and Observations // Adv. Sci. Lett. 2009. Vol. 2. P. 105—120.

6. *Costa F. E. M., Alcaniz J. S., Jain D.* An interacting model for the cosmological dark sector // Phys. Rev. 2012. Vol. 85, № 10. URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.85.107302 (дата обращения: 04.04.2018).

7. *Böhmer Ch.G., Caldera-Cabral G., Lazkoz R., Maartens R.* Dynamics of dark energy with a coupling to dark matter // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 78, №2. URL: https://arxiv.org/pdf/0801.1565.pdf (дата обращения: 04.04.2018).

8. *Nozari K., Behrouz N.* An Interacting Dark Energy Model with Nonminimal Derivative Coupling // Phys. Dark Univ. 2016. Vol. 13, №92. URL: https://arxiv.org/pdf/1605.06028.pdf (дата обращения: 04.04.2018).

9. *Bertolami O., Carrilho P., Paramos J.* Two-scalar-field model for the interaction of dark energy and dark matter // Phys. Rev. 2012. Vol. 86, №10. URL: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.86.103522 (дата обращения: 04.04.2018).

10. *Aviles A., Cervantes-Cota J.L.* Dark matter from dark energybaryonic matter couplings // Phys. Rev. 2011. Vol. 83, №2. URL: https://arxiv.org/pdf/1012.3203.pdf (дата обращения: 04.04.2018).

11. *Червон С.В., Аббязов Р.Р., Крюков С.В.* Динамика киральных космологических полей в фантомно-канонической модели // Известия вузов. Сер. Физика. 2015. Т. 58, №5. С. 13—19.

12. *Chervon S.V.* Chiral Cosmological Models: Dark Sector Fields Description // Quantum Matter. 2013. Vol. 2, №71—82.

13. *Beesham A., Chervon S.V., Maharaj S.D., Kubasov A.S.* An Emergent Universe with Dark Sector Fields in a Chiral Cosmological Model // Quantum Matter. 2013. Vol. 2. P. 388—395.

14. *Mukhanov V.F., Feldman H.A., Brandenberger R.H.* The theory of cosmological perturbations // Phys. Rep. 1992. Vol. 215, iss. 5—6. P. 203—333.

15. *Фомин И.В.* Гравитационные волны в конформно-плоских пространствах // Вестник Мовсковского государственного технологического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 65—78.

16. *Chervon S.V., Novello M., Triay R.* Exact cosmology and specification of an inflationary scenario // Grav. Cosmol. 2005. Vol. 11. P. 329—332.

17. *Chervon S.V., Fomin I.V.* On calculation of the cosmological parameters in exact models of inflation // Grav. Cosmol. 2008. Vol. 14. P. 163.

Об авторе

Игорь Владимирович Фомин — д-р физ.-мат. наук, проф., Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Сергей Викторович Червон — д-р физ.-мат. наук, проф., Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, Россия.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Сергей Владимирович Крюков — д-р физ.-мат. наук, проф., Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Россия.
E-mail: ksv.ulru@gmail.com

The authors

Dr Igor Fomin, Professor, Moscow State Technical University, Russia.
E-mail: ingvor@inbox.ru

Dr Sergey Chervon, Professor, Ulyanovsk State Pedagogical University, Russia.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Dr Sergey Krukov, Professor, L.D. Landau Theoretical Physics University, Russia.
E-mail: ksv.ulru@gmail.com