элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7,С.117-151.

4.П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.I/ Калинингр. ун-т.Калининград,1984.93с.Библиогр.21 назв. Деп. в ВИНИТИ.2.07.84.№ 4481-84.

5.Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

6.П о п о в Ю.И. О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1977.Вып.8.С.43-70.

7.А т а н а с я н Л.С. К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства//Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1957.Т.108.Вып.2.С.3-44.

8.П о п о в Ю.И. Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр/ Калинингр.ун-т.Калининград,1970.Вып.6.С.27-46.

9.П о п о в Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H^r_m ранга r многомерного проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1975.Вып.6.С.102-142.

10.Л а п т е в Г.Ф.,О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ,М.,1971.Т.3.С.49-94.

11.А к и в и с М.А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем//Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М.,1966.Т.1.С.7-31.

12.Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация/Докл. АН Арм.ССР.1959.Т.28.№4.С.151-157.

13.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.

14.О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1973.Т.4.С.71-120.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ

М.М.Похила,Т.Н.Балазюк
(Черновицкий ун-т)

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии подмногообразий M_n многообразия почти комплексной структуры $M_n(J)$,оснащенных таким полем нормалей N ,что в каждой точке $x \in M_m$ соответствующая нормаль N_x пересекает образ $J T_x(M_m)$ касательного к подмногообразию пространства $T_x(M_m)$ по подпространству постоянной размерности r .
Считаем,что $0 < r < n-m < m$.

Пусть $M_n(J)$ n-мерное многообразие почти комплексной структуры со структурными формами ω^J $(J,K,L=\overline{1,n})$. Зададим на многообразии $M_n(J)$ поле объекта линейной связности $\Gamma=\{\Gamma^J_{KL}\}$, присоединенного к группе $\mathcal{D}^2_n$:

$$d\Gamma^J_{JK}-\Gamma^J_{IK}\omega^L_J-\Gamma^J_{JL}\omega^L_K+\Gamma^L_{JK}\omega^J_L-\Gamma^M_{JK}\Gamma^J_{ML}\omega^L+\omega^J_{JK}=\Gamma^J_{JKL}\omega^L. \qquad (1)$$

Если m-мерное подмногообразие M_m многообразия $M_n(J,\Gamma)$ задано системой дифференциальных уравнений

$$\omega^J=\Lambda^J_i\theta^i \qquad (i,j\ldots=\overline{1,m}), \qquad (2)$$

то $\{\Lambda^J_i\}$ является фундаментальным объектом первого порядка подмногообразия M_m ,который удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$d\Lambda^J_i-\Lambda^J_j\theta^j_i+\Lambda^K_i\omega^J_K=\Lambda^J_{ij}\theta^j. \qquad (3)$$

В каждой точке $x \in M_m$ касательное пространство $T_x(M_m)$ определяется векторами

$$\Lambda_i=\Lambda^J_i e_J, \qquad (4)$$

а группа $\mathcal{D}^1_m$ с инвариантными формами $\bar\theta^j_i=\theta^j_i|_{\theta^i=0}$ в каждом касательном пространстве представлена как группа преобразований векторного репера Λ_i :

$$\delta\Lambda_i=\bar\theta^j_i\Lambda_j. \qquad (5)$$

Пусть подмногообразие M_m нормально оснащено полем объекта $\{N^J_\alpha\}$ $(\alpha,\beta=\overline{m+1,n})$:

$$dN^J_\alpha-N^J_\beta\theta^\beta_\alpha+N^K_\alpha\omega^J_K=N^J_{\alpha i}\theta^i. \qquad (6)$$

В каждой точке $x \in M_m$ нормально оснащающее подпространство определяется $n-m$ линейно независимыми векторами

$$N_\alpha = N_\alpha^J e_J, \tag{7}$$

для которых

$$\delta N_\alpha = \bar\theta_\alpha^\beta N_\beta. \tag{8}$$

Так как в M_n задана линейная связность Γ, то, как известно, такое нормально оснащающее поле $N(M_m)$ может быть присоединено к M_m внутренним образом [1].

Будем считать, что нормальное оснащение $N(M_m)$ характеризуется тем, что в каждой точке $x \in M_m$ нормаль $N_x(M_m)$ пересекает образ $\mathcal{J} T_x(M_m)$ касательного пространства $T_x(M_m)$ по τ-мерному подпространству $\mathcal{V}_x(M_m)$ $(0<\tau<n-m)$.

Пусть подпространство $\mathcal{V}_x$ в каждой точке $x \in M_m$ определяется линейно независимыми векторами

$$\mathcal{V}_{\alpha_1} = \mathcal{V}_{\alpha_1}^\alpha N_\alpha \quad (\alpha_1, \beta_1, \ldots = \overline{m+1, m+\tau}), \tag{9}$$

для которых

$$\delta \mathcal{V}_{\alpha_1} = \bar{\mathcal{V}}_{\alpha_1}^{\beta_1} \mathcal{V}_{\beta_1}. \tag{10}$$

Таким образом, поле $\mathcal{V}$ – τ-мерных подпространств $\mathcal{V}_x$ задается полем объекта $\{\mathcal{V}_{\alpha_1}^\alpha\}$, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$d\mathcal{V}_{\alpha_1}^\alpha - \mathcal{V}_{\beta_1}^\alpha \mathcal{V}_{\alpha_1}^{\beta_1} + \mathcal{V}_{\alpha_1}^\beta \theta_\beta^\alpha = \mathcal{V}_{\alpha_1 i}^\alpha \theta^i. \tag{11}$$

Каждое нормально оснащающее поле $N(M_m)$ подмногообразия M_m многообразия $M_n(\mathcal{J})$ естественным образом определяет на M_m $(f\xi\eta\rho)$-структуру [2] со структурными объектами $\{f_i^j\}$, $\{\xi_\alpha^i\}$, $\{\eta_i^\alpha\}$, $\{\rho_\alpha^\beta\}$. В общем случае линейный объект $\{\xi_\alpha^i\}$ определяет $(n-m)$ линейно независимых векторов

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha^i \Lambda_i, \tag{12}$$

которые в каждой точке $x \in M_m$ определяют $(n-m)$-мерное подпространство $\xi_x \subset T_x(M_m)$, а объект $\{\eta_i^\alpha\}$ определяет в $T_x(M_m)$ $(2m-n)$-мерное $\mathcal{J}$-инвариантное подпространство $\eta_x \overset{def}{=} T_x \cap \mathcal{J} T_x$ такое, что

$$\xi_x \oplus \eta_x = T_x(M_m). \tag{13}$$

П р е д л о ж е н и е. Образ подпространства $\mathcal{V}_x$ в каждой точке $x \in M_m$ принадлежит подпространству ξ_x.

Действительно, т.к. $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{J} T_x$, то $\mathcal{J}\mathcal{V}_x \subset T_x$. В то же время $\mathcal{J}\mathcal{V}_{\alpha_1} = \mathcal{J}(\mathcal{V}_{\alpha_1}^\alpha N_\alpha) = \mathcal{V}_{\alpha_1}^\alpha(-\xi_\alpha^i \Lambda_i + \rho_\alpha^\beta N_\beta)$. Следовательно, $\mathcal{V}_{\alpha_1}^\alpha \rho_\alpha^\beta = 0$, $\mathcal{J}\mathcal{V}_{\alpha_1} = -\mathcal{V}_{\alpha_1}^\alpha \xi_\alpha$, т.е. $\mathcal{J}\mathcal{V}_x \subset \xi_x$.

Обозначим через B_x образ подпространства $\mathcal{V}_x$. Это подпространство B_x определяется векторами

$$B_\sigma = B_\sigma^i \Lambda_i \qquad (\tau, \sigma, \ldots = \overline{1, \tau}), \tag{14}$$

где

$$B_\sigma^i = -\mathcal{V}_{m+\sigma}^\alpha \xi_\alpha^i \qquad (\alpha_1 = m+\sigma = \overline{m+1, m+\tau}), \tag{15}$$

а поле B подпространств B_x задается системой дифференциальных уравнений:

$$dB_\sigma^i - B_\tau^i \mathcal{V}_{m+\sigma}^{m+\tau} + B_\sigma^j \theta_j^i = B_{\sigma j}^i \theta^j, \tag{16}$$

где

$$B_{\sigma j}^i = \mathcal{V}_{m+\sigma}^\alpha \xi_{\alpha j}^i - \mathcal{V}_{m+\sigma j}^\alpha \xi_\alpha^i \tag{17}$$

Известно [3], что каждое нормальное оснащение N подмногообразия M_m многообразия $M_n(\mathcal{J}, \Gamma)$ индуцирует в касательном и нормальном расслоениях тангенциальную $\overset{1}{\gamma} = \{\overset{1}{\gamma}{}_{jk}^i\}$ и нормальную $\{\overset{2}{\gamma}{}_{\beta k}^\alpha\} = \overset{2}{\gamma}$ линейные связности соответственно. Линейные связности $\overset{0}{\gamma}$ и $\overset{*}{\gamma}$, которые определяются формулами

$$\overset{0}{\gamma}{}_{jk}^i = -\overset{*}{\Lambda}{}_\varkappa^i (\Lambda_{jk}^\varkappa - \Lambda_j^\iota \Gamma_{\iota k}^\varkappa), \tag{18}$$

$$\overset{*}{\gamma}{}_{\beta k}^\alpha = -\overset{*}{N}{}_\varkappa^\alpha (N_{\beta k}^\varkappa - N_\beta^\iota \Gamma_{\iota k}^\varkappa), \quad \Gamma_{\iota k}^\varkappa = \Gamma_{\iota J}^\varkappa \Lambda_k^J, \tag{19}$$

называют [3] индуцированной и вертикальной связностями.

Т е о р е м а. Если распределение ξ инволютивно и плоскость $\mathcal{V}_x \subset N_x$ переносится параллельно в вертикальной связности $\overset{*}{\gamma}$ вдоль кривых, принадлежащих распределению B, то распределение B инволютивно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия инволютивности распределений ξ и B в репере $R(\Lambda_i, N_\alpha)$ имеют вид [4]:

$$\xi_{\alpha j}^i \xi_\beta^j - \xi_{\beta j}^i \xi_\alpha^j = 0, \tag{20}$$

$$B_{\sigma j}^i B_\tau^j - B_{\tau j}^i B_\sigma^j = 0. \tag{21}$$

Для упрощения доказательства теоремы произведем частичную канонизацию репера $R(\Lambda_i, N_\alpha)$, положив

$$\xi_\alpha^i = \xi_{m+u}^i = \delta_u^i \qquad (u, v, \ldots = \overline{1, n-m}). \tag{22}$$

Полученный репер характеризуется тем, что $\xi_{m+u} = \Lambda_u$. Учитывая (22) и (15), получаем

$$B_\sigma^a = 0 \qquad (a, b, \ldots = \overline{n-m+1, m}). \tag{23}$$

Произведем дальнейшую канонизацию репера $R(\Lambda_i, N_\alpha)$, положив

$$B_\sigma^u = \delta_\sigma^u. \tag{24}$$

Репер $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$, для которого выполняются равенства (22) и (24), характеризуется тем, что векторы Λ_u репера $R(\Lambda_i, N_\alpha)$ помещены в подпространство ξ_x, причем векторы Λ_σ принадлежат подпространству B_x.

Условия инволютивности (20) и (2I) распределений ξ и B в репере $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$ имеют соответственно вид:

$$\xi^i_{m+u\,v} - \xi^i_{m+v\,u} = 0, \qquad (20)$$

$$(\xi^u_{m+\tau\sigma} - \xi^u_{m+\sigma\tau}) + (\gamma^{m+u}_{m+\sigma\tau} - \gamma^{m+u}_{m+\tau\sigma}) = 0, \quad \xi^a_{m+\tau\sigma} - \xi^a_{m+\sigma\tau} = 0. \qquad (2I)$$

Плоскость ν_x переносится параллельно в вертикальной связности $\overset{*}{\gamma}$ при смещении точки $x \in M_m$ по кривым, принадлежащим распределению B, если в репере $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$ выполняются соотношения:

$$\nu^\alpha_{\alpha,\sigma} = 0. \qquad (25)$$

Так как по условию теоремы выполнены соотношения (20) и (25), то выполнены также и соотношения (2I), т.е. распределение B инволютивно.

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности//Докл.АН СССР.1959.Т.I26,№3. С.490-493.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. $(f\,\varepsilon\,\eta\varphi)$-структура на дифференцируемом многообразии// Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975. Т.7.С.5-22.

3. Остиану Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами.П.Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях// Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1982.Т.I3.С.27-76.

4. О с т и а н у Н.М. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами.У. CR-подмногообразия в многообразии почти комплексной структуры // Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1987.Т.I9.С.59-I00.

УДК 514.76

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ Т-СВЯЗНОСТИ

А.К.Р ы б н и к о в

(Московский ун-т)

В настоящей работе продолжено изучение дифференциально-геометрических структур, ассоциированных с совокупностью аффинных связностей, получаемых друг из друга путем так называемых Т-преобразований (см. [I]), соответствующих тензорному полю T^{im}_{jk} ($T^{im}_{jk} = T^{im}_{kj}$, $T^{tm}_{tk} = 0$). Класс Т-преобразований довольно широк: в нем, в частности, содержатся проективные, конформные, некоторые почти проективные преобразования связностей. Ранее [1] мы изучали структуры (Т-связности), при рассмотрении которых требовалась симметрия тензора T^{im}_{jk} не только по нижним, но также по верхним индексам. В этой работе указан способ обобщения понятия Т-связности, при котором можно отказаться от симметрии тензора T^{im}_{jk} по верхним индексам и расширить, таким образом, круг изучаемых структур.

I. При преобразовании аффинных связностей (без кручения), определенных на многообразии M_n, происходит преобразование проективных нормалей, определенных заданием объекта Π^i_{jk} ($i,j,k = 1, \ldots, n$), и преобразование касательных оснащений, определенных заданием объекта π_j [2]. Снабдив проективные нормали оснащениями (оснащенные проективные нормали определяются заданием расширенного объекта Π^i_{jk}, Π^0_{jk}), получим структуру, которую назовем дополненной аффинной связностью. В дополненной аффинной связности содержится аффинная связность, определенная объектом (Π^i_{jk}, π_j). Будем рассматривать преобразования дополненной аффинной связности, при которых изменение оснащенных проективных нормалей и касательных оснащений происходит согласованно, причем тензор деформации оснащенных проективных нормалей с компонентами N^i_{jk}, N^0_{jk} ($N^i_{jk} = \widetilde{\Pi}^i_{jk} - \Pi^i_{jk}$, $N^0_{jk} = \widetilde{\Pi}^0_{jk} - \Pi^0_{jk}$) и ковектор P_j ($P_j = \widetilde{\pi}_j - \pi_j$), определяющий преобразование касательных оснащений, связаны соотношениями $N^i_{jk} = T^{im}_{jk} P_m$, $N^0_{jk} = T^{0m}_{jk} P_m$. Такие преобразования дополненной аффинной связности будем называть Т-преобразованиями.

Коэффициенты T^{im}_{jk} ($T^{im}_{jk} = T^{im}_{kj}$, $T^{tm}_{tk} = 0$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dT^{im}_{jk} + T^{tm}_{jk}\theta^i_t + T^{it}_{jk}\theta^m_t - T^{im}_{tk}\theta^t_j - T^{im}_{jt}\theta^t_k = T^{im}_{jk,\ell}\theta^\ell_0,$$