PARALLEL DISPLACEMENTS BORTOLOTTI`S PLANE ALONGONE-PARAMETRICAL FAMILIES OF PLANE GENERATORS OF THE PLANE SURFACE

In n-dimensional projective space P_n the plane surface is considered as r-dimensional family B_r of the plane generators L_h. Bortolotti`s clothing of the plane surface, consisting in adding to each generator L_h projectively supplemental plane P_{n-h-1}, is made. By means of exterior differentiation of covariant differential of clothing quasitensor we build the pseudotensor, under vanishing of which the displacement of the clothing plane is absolute. The existence conditions of parallel displacements of Bortolotti`s plane along one-parametrical families of the plane generators are obtained.

УДК 514.7

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

АНАЛОГ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОДУЛЯРНОГО ПРОСТРАНСТВА С РАСТРАНОМ

Рассмотрен одуль Ли преобразований одулярного 3-мерного пространства с растраном. Установлено, что он является 2-ступенно разрешимым, а также расширением растрана 1-мерным линейным пространством.

Аффинное пространство определяется в аксиоматике Г. Вейля на линейном пространстве. Линейное пространство над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел является коммутативным действительным одулем Ли. Одули на произвольной алгебраической структуре введены Л.В. Сабининым в 1977 году [1]. Действительные одули на группах Ли называются одулями Ли. Определение 3-мерных одулей Ли можно найти в [2]. Заменяя линейное пространство одулем Ли в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, получаем вейлевское одулярное пространство — ВО-пространство. Среди указанных одулей Ли содержится растран — одуль Ли на основной аффинной группе. Одулярное пространство с растраном называется ЛМ-пространством; оно содержит аффинные плоскости. Геометрия пространства с растраном изучается в [2], некоторые ее элементы содержатся в сборниках «Дифференциальная геометрия многообразий фигур», выпуски 32—36. Ниже описываются ЛМ-преобразования пространства с растраном, аналогичные аффинным преобразованиям аффинного пространства. Установлено, что они составляют одуль Ли, этот одуль является двух-ступенно разрешимым, а также расширением растрана 1-мерным линейным пространством.

§ 1. ЛМ-пространство

1.1.Растран. На многообразии R^3 растран (см. [2]) задается следующими операциями:

$$(x,y,z)+(u,v,w) = (x+y, ye^u+v, ze^u+w);$$

$$t(x,y,z)=(xt, y\frac{e^{xt}-1}{e^x-1}, z\frac{e^{xt}-1}{e^x-1});\ t(0,y,z)=(0,yt,zt),\ t\in R.$$

Также растран задается операциями (см. [3]) $(x>o, u>0)$:

$$(x,y,z)+(u,v,w) = (x+y, yu+v, zu+w);$$

$$t(x,y,z)=(x^t, y\frac{x^t-1}{x-1}, z\frac{x^t-1}{x-1});\ t(1,y,z)=(1,yt,zt),\ t\in R.$$

Из операций второго вида можно получить операции первого вида при замене x на e^x, y на e^y. Рассматриваем растран, заданный операциями первого вида, до п. 2.2. Растран обозначается P^3, элементы растрана называются растами и обозначаются $\vartheta, \alpha, \beta, ..., \rho, ...$ Раст $\rho=(x,y,z)$ при $x\neq 0$ называется расширением. Нулевой раст есть $\vartheta=(0, 0, 0)$, противоположный к расту ρ равен $-\rho=(-x, ye^{-x}, ze^{-x})$.

1.2. ЛМ-пространство. Множество точек Λ = $\{A, B, ..., M, ...\}$ называется ЛМ-пространством [2], если отображение пар точек в растран удовлетворяет аксиомам Г. Вейля:

1. Для всякой точки A и всякого раста ρ существует единственная точка B такая, что паре (A, B) соответствует раст ρ. Обозначение: $AB = \rho$.

2. Для любых трех точек A, B, C, если $AB = \rho$, $BC = \sigma$, то $AC = \rho + \sigma$.

Множество растов $Б = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = (1,0,0)$, $\beta = (0,1,0)$, $\gamma = (0,0,1)$ является базисом растрана P^3, так как (x, y, z) = $x\alpha + y\beta + z\gamma$. Множество B = $(O, \alpha, \beta, \gamma)$, где O — точка, называется репером ЛМ-пространства. Координаты раста OM в базисе $Б$ называются координатами точки M в репере B. Если OM = (x, y, z), то $M =$ (x, y, z).

Прямая $\langle A, \mu\rangle$, определяемая точкой A и ненулевым растом μ, есть множество точек $\langle A, \mu\rangle$ = $\{M \mid AM = t\mu, t \in R\}$. Плоскость $\langle A, \mu, \nu\rangle$, определяемая точкой A и независимыми растами μ и ν, есть множество точек $\langle A, \mu, \nu\rangle$ = $\{M \mid AM = u\mu + v\nu, (u, v) \in R^2\}$.

Координатная плоскость $\langle O, \beta, \gamma\rangle$ аффинная, координатные плоскости $\langle O, \alpha, \beta\rangle$, $\langle O, \alpha, \gamma\rangle$ являются ЛМ-плоскостями. Через всякую точку P ЛМ-пространства проходит единственная аффинная плоскость $\langle P, \beta, \gamma\rangle$.

§ 2. ЛМ-преобразования

2.1. Определение и формулы ЛМ-преобразований. Преобразование ЛМ-пространства, в котором плоскость отображается на плоскость (следовательно, прямая отображается на прямую), называется ЛМ-преобразованием ЛМ-пространства. Это обобщение аффинных преобразований аффинного пространства.

Пусть в ЛМ-преобразовании λ пространства Λ точка $M = (x, x^1, x^2)$ отображается на точку $M' = (x', x'^1, x'^2)$. Формулы преобразования λ (см. [4]) таковы:

$$x' = x + c,\ x'^i = p^i e^x + a^i_j x^j + d^i,\ \det(a^i_j) \neq 0.$$

Если в преобразовании λ всякая аффинная плоскость ЛМ-пространства инвариантна, то формулы преобразования λ линейны:

$$x' = x,\ x'^i = a^i_j x^j + d^i,\ \det(a^i_j) \neq 0.$$

Еще выделим преобразования λ^α, в которых базисное расширение $\alpha = (1, 0, 0)$ инвариантно:

$$x' = x + c,\ x'^i = p^i e^x + a^i_j x^j,\ \det(a^i_j) \neq 0,$$

здесь (c, p^1, p^2) координаты образа начала $(0, 0, 0)$, в общем ЛМ-преобразовании координаты образа начала другие. Формулы ЛМ-преобразования получены в [4], их свойства изучаются ниже.

Всякому ЛМ-преобразованию соответствует единственная матрица, которая в блочном виде записывается так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^c & 0 \\ D & P & A \end{pmatrix}, \text{ где } D = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix},\ A = (a^i_j).$$

Матрица линейного ЛМ-преобразования и матрица ЛМ-преобразования, в котором базисное расширение инвариантно, имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} e^c & 0 \\ P & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^c & 0 \\ D & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Композиции преобразований соответствует произведение матриц. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^c & 0 \\ D & P & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^g & 0 \\ H & Q & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{c+g} & 0 \\ D+AH & e^g P + AQ & AB \end{pmatrix}.$$

2.2. Одуль Ли преобразований. Выполняется

Теорема 1. *Множество Λ_λ ЛМ-преобразований является одулем Ли.*

\# ЛМ-преобразованию λ сопоставим кортеж, также обозначаемый λ, $\lambda = (c, D, P, A)$. Согласно произведению матриц ЛМ-преобразований на кортежах определена операция

$$(c, D, P, A) + (g, H, Q, B) = (c+g, D+AH, e^g P + AQ, AB)\,.$$

Нейтральным является кортеж $\vartheta = (0,\ 0,\ 0,\ E)$, где E — единичная матрица, $\lambda + \vartheta = \lambda$. Противоположный к λ кортеж равен $-\lambda = (-c, -A^{-1}D, -e^{-c}A^{-1}P, A^{-1})$, $\lambda + (-\lambda) = \vartheta$. Введем на Λ_λ внешнюю операцию:

$$t(c, D, P, A) = (ct, \frac{A^t - E}{A - E} D, \frac{A^t - e^{ct}E}{A - e^c E} P, A^{-1}),\ t \in R\,.$$

Степень A^t неособой матрицы $A \in GL(2, R)$ определяется согласно [3] следующим образом. Матрица A может иметь 0, 1, 2 собственных значений, она эквивалентна одной из матриц, соответственно

$$r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{pmatrix};$$

их действительные степени таковы:

$$r^t\begin{pmatrix} \cos t\varphi & -\sin t\varphi \\ \sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix},\ r^t\begin{pmatrix} ch t\varphi & sh t\varphi \\ sh t\varphi & ch t\varphi \end{pmatrix},\ r^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\varphi & 1 \end{pmatrix};$$

если $M = U^{-1}AU$, то $M^t = U^{-1}A^tU$. #

Теорема 2. *Множества линейных ЛМ-преобразований и ЛМ-преобразований, сохраняющих базисное расширение, являются пододулями одуля Ли* Λ_λ *ЛМ-преобразований*.

Первый из пододулей состоит из кортежей $(c, D, 0, A)$, второй из кортежей (c, D, P, E).

Теорема 3. *Одуль Ли* Λ_λ *ЛМ-преобразований является полупрямой суммой двух линейных пространств (т. е.* Λ_λ *2-ступенно разрешим), а также полупрямой суммой растрана и 1-мерного линейного пространства*.

На основе внутренней операции на Λ_λ для всякого кортежа выполняется $(c, D, P, A) = (c,\ 0,\ 0,\ A) + (c, A^{-1}D, A^{-1}P, E)$. Множество кортежей $(c,\ 0,\ 0,\ A)$ обозначим L_1^2, множество кортежей $(0, D, P, E)$ обозначим L_2^2. Операция сложения на L_1^2, L_2^2 коммутативна, они являются пододулями в Λ_λ; значит, L_1^2 , L_2^2 — линейные пространства. Выполняется $(-c,\ 0,\ 0,\ A^{-1}) + (0, D, P, E) + (c,\ 0,\ 0,\ A) = (0, A^{-1}D, e^c P, E) \in L_1^2$, т. е. это инвариантный пододуль, но L_2^2 — неинвариантный, поэтому одуль Ли Λ_λ есть полупрямая сумма линейных пространств $\Lambda_\lambda = L_1^2 \dashv L_2^2$.

Далее: $(c, D, P, A) = (c,0,0,E) + (0, D, P, A)$. Кортежи $(c,\ 0,\ 0,\ E)$ составляют 1-мерное линейное пространство L^1. Так как $(0, D, P, A) + (0, H, Q, B) = (0, D + AH, P + AQ, AB)$ и $t(0, D, P, A) = (0, \dfrac{A^t - E}{A - E} D, \dfrac{A^t - E}{A - E} P, A^t)$, то кортежи $(0, D, P, A)$ составляют растран (см. п. 1.1), обозначим его P_λ. Выполняется $\Lambda_\lambda = P_\lambda \dashv L^1$. Одуль Ли Λ_λ ЛМ-преобразований ЛМ-пространства является расширением растрана 1-мерным линейным пространством. #

Список литературы

1. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью //ДАН СССР. 1977. №5. С. 800—803.
2. *Долгарев А.И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: Монография. Пенза: 2005.
3. *Долгарев А.И.* Растраны на различных структурах. Киев: 1996.
4. *Долгарев А.И.* ЕМ-пространства: Дис. канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 1991.

Dolgarew

CLONE OF AFFINE TRANSFORMATION OF ODULAR SPACE ON RASTRAN

The Lie odule of transformation of odular space on rastran of dimension 3 is considered. It is placed, that it is twice solvable, and also is the extension rastran by linear space of dimension 1.

УДК 514.75

Н.А. Елисеева

(Калининградский государственный технический университет)

НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ В РАССЛОЕНИИ НОРМАЛЕЙ ПЕРВОГО РОДА НА Λ-ПОДРАССЛОЕНИИ $\mathcal{H}(\Pi)$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

На оснащенном в смысле Нордена — Картана Λ-подрасслоении в расслоении его нормалей 1-го рода построены 24 нормальные связности. Указаны условия совпадения некоторых из них.

В работе используется следующая система индексов: