УДК 574.76

Н. В. Малаховский

(Московская финансово-юридическая академия. Калининградский филиал)

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЙ И ОХВАТОВ Г. Ф. ЛАПТЕВА

Дана характеристика компьютерного моделирования метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева для дифференцируемых многообразий в однородных и обобщенных пространствах. Это моделирование осуществляется с использованием компьютерной программы автоматического поиска полей геометрических объектов исследуемого многообразия фигур (L-программы). Действие L-программы показано на примерах гиперповерхности в $(n+1)$-мерном проективном пространстве [1, с. 350—384], многообразия $(m,m,n)^2$ квадратичных элементов $(m<n)$ в n-мерном проективном пространстве ([2],с. 87—95) и n-параметрического семейства Π_n оснащенных коллинеаций $\pi : P_n \to p_n$ двух проективных пространств [3].

§1. Характеристика компьютерной программы автоматического поиска геометрических объектов дифференцируемого многообразия (L-программы)

При исследовании дифференцируемых многообразий в однородных и обобщенных пространствах важную роль играет нахождение геометрических объектов, особенно тензоров и квазитензоров, охватываемых полями фундаментальных геометрических объектов различных порядков. Использование алгоритма получения охватов и проверки найденной системы величин на критерий геометрического объекта затрудняются громоздкими вычислениями.

Компьютерные программы (см. [4—6]) облегчают этот процесс, но не позволяют автоматически путем перебора большого числа различных вариантов находить геометрические объекты.

В данной работе дано приложение новой компьютерной программы автоматического поиска полей геометрических объектов исследуемого дифференцируемого многообразия (L-программы). Результатом работы L-программы является нахождение абсолютных и относительных инвариантов, тензоров и квазитензоров, а также геометрических объектов, исходя из заданной системы дифференциальных уравнений исследуемого многообразия фигур.

Суть работы программы заключается в следующем. На вход программы в автоматическом режиме подается список величин, дифференциалы которых были получены на предыдущих этапах работы программы (первоначальный список образуют величины, дифференциалы которых определяются заданной системой дифференциальных уравнений исследуемого многообразия). Из величин, входящих в этот список, формируются произведения из их сочетаний по 1, 2, 3 и т. д., с попарно различными индексами. Каждое из сформированных таким образом произведений порождает новую величину, для которой находится выражение ее дифференциала. Системы величин, являющихся коэффициентами при базисных формах полученного дифференциала, порождают, в свою очередь, новые величины, для которых также находятся соответствующие дифференциалы.

Из каждой полученной таким образом величины путем всевозможных сверток ее нижних и верхних индексов из соответствующих групп образуется множество новых величин. Эти величины распределяются по накопительным группам, каждая из которых определяется своим набором верхних и нижних индексов.

Из элементов каждой группы образуются суммы всевозможных сочетаний нового элемента с уже имеющимися элементами этой группы. Слагаемые каждой из образованных таким образом сумм (в случае, если она состоит более чем из одного слагаемого) подвергаются процедуре подбора соответствующих множителей таким образом, чтобы после дифференцирования полученной линейной комбинации образовался геометрический объект (в частности, абсолютный или относительный инвариант, тензор или квазитензор). При этом производится вывод на экран монитора выражений самой линейной комбинации и ее дифференциала. В процессе работы L-программы осуществляется создание дифференциалов взаимных дважды ко- или контравариантных тензоров, используемых в дальнейшей работе программы, а также производится альтернирование, симметрирование или циклирование по индексам исследуемых величин соответствующих геометрических объектов.

После завершения этой процедуры включается процедура поиска геометрических объектов, являющихся охватами ранее найденных геометрических объектов.

§2. Приложение L-программы к исследованию гиперповерхности S_n в $(n+1)$-мерном проективном пространстве

Для работы программы автоматического поиска геометрических объектов гиперповерхности $S_n \in P_{n+1}$ используются уравнения

$$\omega^{n+1} = 0, \ \ \omega_i^{n+1} = a_{ij}\omega^j,$$

$$(\det a_{ij} \neq 0, \ \ i, j, k = \overline{1, n}, \ \ \omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \ \ \omega^{n+1} \overset{def}{=} \omega_0^{n+1}) \qquad (2.1)$$

(см. [1], уравнения (36), (37)) и условия эквипроективности. На базе процессора Pentium III, используя компьютерную программу продолжений и охватов (С-программу) [4, с. 77—107], находят системы дифференциальных уравнений фундаментальных геометрических объектов гиперповерхности до четвертого порядка включительно (см. [1], (38) — (40)) (за 10 секунд). Использование этих дифференциальных уравнений в L-программе позволяет найти все основные геометрические объекты (тензоры и квазитензоры), полученные Г. Ф. Лаптевым:

$$\left\{a_{ij}\right\},\ \left\{b_k, a_{ij}\right\},\ \left\{b^k, a^{ij}\right\},\ \left\{\hat{b}, b_k, a^{ij}\right\},\ \left\{\hat{b}, b_i, a_{ij}\right\},$$
$$\left\{b_{ijk}\right\},\ \left\{b_0\right\},\ \left\{b_{ij}\right\},\ \left\{b^{ij}\right\},\ \left\{l^i\right\},\ \left\{k_j\right\},\ \left\{a_{ij}, b_k, \hat{l}\right\}, \qquad (2.2)$$
$$\left\{j^k\right\},\ \left\{h_k\right\},\ \left\{\hat{c}_k\right\},\ \left\{\hat{c}_{ij}\right\},\ \left\{\hat{\partial}_{ij}\right\}.$$

§3. Приложение L-программы к нахождению полей геометрических объектов многообразия $(m,m,n)^2$ квадратичных элементов $(m<n)$ и n-параметрического семейства Π_n оснащенных коллинеаций

1. Применяя С-программу к системе пфаффовых уравнений m-мерного многообразия квадратичных элементов

$$\nabla a_{ij} - \frac{2}{n} a_{ij}\omega_{n+1}^{n+1} = b_{ij}^k \omega_k,\ \ \nabla a_{bc} - \frac{2}{n} a_{bc}\omega_{n+1}^{n+1} = b_{bc}^k \omega_k,$$
$$\omega_a = 0,\ \ \omega_a^i = h_a^{ij}\omega_j,\ \ \omega_i^a = h_i^{aj}\omega_j, \qquad (3.1)$$

где $\omega_a \overset{def}{=} \omega_a^{n+1}$, $\omega_k \overset{def}{=} \omega_k^{n+1}$, $i,j,k=\overline{1,m}$, $a,b,c=\overline{m+1,n}$, находят систему дифференциальных уравнений фундаментального объекта второго порядка, которая используется в L-программе. Удается получить не только ранее известные геометрические объекты, но и ряд новых тензоров и квазитензоров, задающих инвариантные гиперконусы второго и третьего порядков и инвариантную точку вне гиперплоскости квадратичного элемента $Q_{n-2} \in (m,m,n)^2$, отличную от известной ранее (см. [2; 7]).

2. Осуществляя с помощью С-программы продолжение системы пфаффовых уравнений n-параметрического семейства Π_n оснащенных коллинеаций $\pi : P_n \to p_n$

$$\omega^i = \lambda_I^i \Omega^I,\ \ \nabla M_I^i = M_{IJ}^i \Omega^J,\ \ \nabla P_I + \Omega_I^0 = P_{IJ}\Omega^J, \qquad (3.2)$$

где $\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i$, $\Omega^I = \Omega_0^I$, $i,j,k,I,J,K=\overline{1,n}$, получают уравнения (1.7), (1.8) работы [3]. Использование этих уравнений в L-программе позволяет получить ряд новых, ранее неизвестных геометрических объектов семейства Π_n (см. [3]). Найденные с помощью L-программы квазитензоры $\{r_i\}$, $\{t_i\}$, $\{R_I\}$, $\{T_I\}$ задают в пространствах p_n и P_n инвариантные гиперплоскости, не проходящие через точки a_0 и A_0 $\left(a_0 = \pi\left(A_0\right)\right)$, а следовательно, в пространствах p_n и P_n индуцируются инвариантные оснащения Бортолотти [3].

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. общ. ГИТТЛ. М., 1953. Т. 2. С. 275 —382.

2. *Малаховский В. С., Малаховский Н. В.* Поля геометрических объектов на *m*-мерном невырожденном многообразий квадратичных элементов в *n*-мерном проективном пространстве ($m < n$) // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. №38. С. 87 —95.

3. *Малаховский В. С.* Поля геометрических объектов на *n*-параметрическом семействе оснащенных коллинеаций *n*-мерных проективных пространств // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. №39. С. 88—95.

4. *Малаховский В. С., Малаховский Н. В.* Компьютерные программы приложения метода внешних форм Картана к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных и к исследованию дифференцируемых многообразий // Вестник Калининградского ун-та. 2005. Вып. 1—2. С. 46—54.

5. *Малаховский Н. В.* Компьютерные программы исследования методом Картана многообразий фигур в однородных пространствах // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2005. №36. С. 79—87.

6. *Малаховский Н. В.* Компьютерное моделирование исследования дифференцируемых многообразий и ассоциированных связностей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. №36. С. 77—107.

7. *Малаховский В. С.* Многообразия алгебраических элементов в *n*-мерном проективном пространстве // Геом. сб. Вып. 3. Тр. Томского ун-та. 1963. Т. 168. С. 43 —53.

N. Malakhovsky

COMPUTER MODELLING OF G. F. LAPTEV`S METHOD OF CONTINUATIONS AND CLOTHINGS

The characteristic of computer modelling of G. F. Laptev's method of continuations and clothings for differentiable manifolds in the homogeneous and generalized spaces is given. This modelling is carried out with use of the computer program of automatic search of fields of geometrical objects of the investigated manifolds of figures (L-program). Performance of the L-program is shown on examples of a hypersurface in $(n + 1)$-dimensional projective space, manifold $(m,m,n)^2$ of quadratic elements $(m<n)$ in n-dimensional projective space and n-parametrical family Π_n of equipped kollineations $\pi : P_n \to p_n$ of two projective spaces [3].

УДК 514.756.2

А.М. Матвеева

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ЧЕБЫШЕВСКИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ТКАНИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Работа посвящена приложению аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$ [4] к изучению геометрии тканей, заданных на распределении $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов в конформном пространстве C_n, а именно рассмотрены геодезические и чебышевские ткани в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$.