УДК 514.75

Н. А. Рязанов

ОБЪЕКТ КРИВИЗНЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА

Объект кривизны 2-го порядка содержит объект кривизны фундаментально-групповой связности, задаваемой в главном расслоении; объект кривизны аффинной связности над многообразием; компоненты 2-го порядка. Выведены дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка. Эти сравнения показывают, что объект кривизны образует геометрический объект лишь в совокупности с компонентами 2-го порядка объекта связности. В общем случае объект кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка не образует тензор.

The second-order curvature object contains the curvature object of the fundamental-group connection defined in the principal bundle; the curvature object of an affine connection over a manifold; second-order components. Differential comparisons for the components of the object of curvature of the second-order fundamental-group connection are made. These comparisons show that the curvature object forms a geometric object only in combination with components of the second-order connectivity object. In the general case, the object of curvature of the fundamental group connection of the second order does not form a tensor.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, фундаментально-групповая связность, объект кривизны 2-го порядка, полуголономное гладкое многообразие.

Key words: structure equations of Laptev; fundamental-group connection, the second order curvature object; semi-holonomic smooth manifold.

Рассмотрим главное расслоение $G_r(M_n)$, базой которого служит n-мерное гладкое многообразие M_n, а типовом слоем является r-членная группа Ли G_r. Его структурные уравнения Лаптева имеют вид [1]

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \ i, j, k, \ldots = \overline{1, n}, \tag{1}$$

$$D\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i, \ \alpha, \beta, \gamma, \ldots = \overline{n+1, n+r}, \tag{2}$$

где D — символ внешнего дифференциала; $\wedge$ — знак внешнего умножения; ω^i — базисные линейные дифференциальные формы; ω^α — слоевые дифференциальные формы; ω^j_i — вторичные базисные формы; ω^α_i — вторичные слоевые формы; $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы Ли G_r, удовлетворяющие условиям антисимметрии по ниж-

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 4. С. 10 – 15.

ним индексам $C^{\alpha}_{(\beta\gamma)}=0$, а также тождествам Якоби $C^{\alpha}_{\beta\{\gamma}C^{\beta}_{\delta\varepsilon\}}=0$, где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные — циклирование.

Для задания связности по Лаптеву в главном расслоении $G_r(M_n)$ введем формы связности

$$\Omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{i}\omega^{i}\,. \tag{3}$$

Дифференцируя формы (3) внешним образом с учетом (1, 2), получим

$$\begin{gathered}D\Omega^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Omega^{\beta}\wedge\Omega^{\gamma}+\omega^{i}\wedge(d\Gamma^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i}+\Gamma^{\beta}_{j}\omega^{\alpha}_{\beta}+\omega^{\alpha}_{i})-\\-C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{i}\wedge\omega^{j},\ \ \omega^{\alpha}_{\beta}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}.\end{gathered} \tag{4}$$

Компоненты объекта фундаментально-групповой связности Γ^{α}_{i} удовлетворяют дифференциальным уравнениям [1]:

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{i}+\omega^{\alpha}_{i}=\Gamma^{\alpha}_{ij}\omega^{j}\,, \tag{5}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{i}=d\Gamma^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i}+\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta}\,.$$

Тогда уравнения (4) можно записать в виде

$$D\Omega^{\alpha}=C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Omega^{\beta}\wedge\Omega^{\gamma}+R^{\alpha}_{ij}\omega^{i}\wedge\omega^{j}\,, \tag{6}$$

где

$$R^{\alpha}_{ij}=\Gamma^{\alpha}_{[ij]}-C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}\,, \tag{7}$$

а квадратные скобки обозначают альтернирование. Получили структурные уравнения (6) для форм связности Ω^{α}, включающие компоненты объекта кривизны R^{α}_{ij}, выражающиеся по формуле (7).

Продолжим уравнения (1, 2), т. е., дифференцируя внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана, получим:

$$\begin{gathered}D\omega^{i}_{j}=\omega^{k}_{j}\wedge\omega^{i}_{k}+\omega^{k}\wedge\omega^{i}_{jk},\ \ \omega^{i}_{jk}\wedge\omega^{j}\wedge\omega^{k}=0;\\D\omega^{\alpha}_{i}=\omega^{j}_{i}\wedge\omega^{\alpha}_{j}+\omega^{\beta}_{i}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}+\omega^{j}\wedge\omega^{\alpha}_{ij},\ \ \omega^{\alpha}_{ij}\wedge\omega^{i}\wedge\omega^{j}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Продолжая уравнения (5) с учетом их самих, а также (1, 2, 8), получим дифференциальные сравнения

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{[ij]}-\Gamma^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{[ij]}+C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\gamma}_{j}+\omega^{\alpha}_{[ij]}\cong 0\ \ (\mathrm{mod}\ \omega^{j}).$$

Тогда дифференциальные сравнения объекта кривизны фундаментально-групповой связности 1-го порядка имеют следующий вид:

$$\Delta R^{\alpha}_{ij}-\Gamma^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{[ij]}+\omega^{\alpha}_{[ij]}\cong 0\,. \tag{9}$$

Утверждение 1. *В случае полуголономности* [4] *гладкого многообразия* M_n *1-го порядка, когда* $\omega^k_{[ij]} \cong 0$, *сравнения (9) примут вид* $\Delta R^\alpha_{ij} + \omega^\alpha_{[ij]} \cong 0$. *В случае слоевой полуголономности (см.: [4]) расслоения* $G_r(M_n)$ *1-го порядка, когда* $\omega^\alpha_{[ij]} \cong 0$, *сравнения (9) примут вид* $\Delta R^\alpha_{ij} - \Gamma^\alpha_k \omega^k_{[ij]} \cong 0$. *В обоих случаях объект кривизны* R^α_{ij} *фундаментально-групповой связности 1-го порядка не является тензором. В полуголономном случае, когда* $\omega^k_{[ij]} \cong 0$, $\omega^\alpha_{[ij]} \cong 0$, *объект* R^α_{ij} *– тензор.*

Формы аффинной связности имеют вид [3]

$$\Omega^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k . \tag{10}$$

Дифференцируя их внешним образом с учетом (8_1), получим

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + \omega^k \wedge (d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k - \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{lt}\omega^t + \omega^i_{jk}).$$

Компоненты объекта аффинной связности Γ^i_{jk} удовлетворяют дифференциальным уравнениям [3]:

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l , \tag{11}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k .$$

Тогда уравнения (10) можно записать в виде

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + \omega^k \wedge (\Gamma^i_{jkl}\omega^l - \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{lt}\omega^t) .$$

Вынося общие базисные формы за скобки, получим:

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + (\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^t_{jk}\Gamma^i_{tl})\omega^k \wedge \omega^l .$$

Альтернируя коэффициенты в последнем слагаемом, введем обозначение

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l , \quad R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]}, \tag{12}$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках. Получили структурные уравнения (12_1) для форм связности Ω^i_j, включающие в себя компоненты объекта кривизны R^i_{jkl}, выражающиеся по формулам (12_2).

Продолжая уравнения (11) с учетом их самих, а также (1), получим дифференциальные сравнения (ср.: [3])

$$\Delta\Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^t_{j[k}\omega^i_{tl]} + \Gamma^i_{t[k}\omega^t_{jl]} + \Gamma^i_{jt}\omega^t_{[kl]} + \omega^i_{j[kl]} \cong 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^l) , \tag{13}$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках. Тогда дифференциальные сравнения объекта кривизны аффинной связности имеют следующий вид:

$$\Delta R^i_{jkl} - \Gamma^i_{jt}\omega^t_{[kl]} + \omega^i_{j[kl]} \cong 0 \ .$$

Вместе с формами Ω^α и Ω^i_j рассмотрим формы

$$\Omega^\alpha_i = \omega^\alpha_i - L^\alpha_{ij}\omega^j, \qquad (14)$$

где L^α_{ij} — некоторые функции продолженных базисных и слоевых параметров. Дифференцируя внешним образом формы (14), получим:

$$D\Omega^\alpha_i = \Omega^j_i \wedge \Omega^\alpha_j + C^\alpha_{\beta\gamma}\Omega^\beta_i \wedge \Omega^\gamma +$$
$$+\omega^j \wedge (\Delta L^\alpha_{ij} + C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_j\omega^\gamma_i + \Gamma^k_{ij}\omega^\alpha_k + \omega^\alpha_{ij}) - (\Gamma^l_{ij}L^\alpha_{lk} + C^\alpha_{\beta\gamma}L^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_k)\omega^j \wedge \omega^k.$$

Связность в главном продолженном расслоении задается с помощью поля объекта $\Gamma^2 = \{\Gamma^\alpha_i, \Gamma^i_{jk}, L^\alpha_{ij}\}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (5), (11) и следующим:

$$\Delta L^\alpha_{ij} - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_j\omega^\beta_i + \Gamma^k_{ij}\omega^\alpha_k + \omega^\alpha_{ij} = L^\alpha_{ijk}\omega^k. \qquad (15)$$

Утверждение 2. *Формы фундаментально-групповой связности 2-го порядка* Ω^α, Ω^i_j, Ω^α_i *подчинены структурным уравнениям* (6), (12_1) *и следующим уравнениям:*

$$D\Omega^\alpha_i = \Omega^j_i \wedge \Omega^\alpha_j + C^\alpha_{\beta\gamma}\Omega^\beta_i \wedge \Omega^\gamma + K^\alpha_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \qquad (16)$$

где компоненты 2-го порядка K^α_{ijk} *объекта кривизны* $R^2 = \{R^\alpha_{ij}, R^i_{jkl}, K^\alpha_{ijk}\}$ *выражаются по формуле*

$$K^\alpha_{ijk} = L^\alpha_{i[jk]} - \Gamma^l_{i[j}L^\alpha_{lk]} - C^\alpha_{\beta\gamma}L^\beta_{i[j}\Gamma^\gamma_{k]}. \qquad (17)$$

Найдем дифференциальные сравнения для пфаффовых производных L^α_{ijk} объекта L^α_{ij}. Для этого замкнем уравнения (15):

$$dL^\alpha_{ijk} \wedge \omega^k - L^\alpha_{ijl}\omega^l_k \wedge \omega^k + L^\beta_{ijk}\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^k - L^\alpha_{ljk}\omega^l_i \wedge \omega^k - L^\alpha_{ilk}\omega^l_j \wedge \omega^k +$$
$$+ L^\beta_{ij}C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma_k \wedge \omega^k - L^\alpha_{lj}\omega^l_{ik} \wedge \omega^k - L^\alpha_{il}\omega^l_{jk} \wedge \omega^k + \Gamma^l_{ijk}\omega^\alpha_l \wedge \omega^k +$$
$$+ \Gamma^l_{ij}\omega^\alpha_{lk} \wedge \omega^k - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{jk}\omega^\beta_i \wedge \omega^k - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_j\omega^\beta_{ik} \wedge \omega^k + \omega^\alpha_{ijk} \wedge \omega^k = 0.$$

Вынося общие базисные формы ω^k за скобки и собирая первые пять слагаемых под дифференциальный оператор ΔL^α_{ijk}, имеем

$$(\Delta L^\alpha_{ijk} + L^\beta_{ij}C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma_k - L^\alpha_{lj}\omega^l_{ik} - L^\alpha_{il}\omega^l_{jk} + \Gamma^l_{ijk}\omega^\alpha_l + \Gamma^l_{ij}\omega^\alpha_{lk} -$$
$$- C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{jk}\omega^\beta_i - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_j\omega^\beta_{ik} + \omega^\alpha_{ijk}) \wedge \omega^k = 0.$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана и альтернируя по индексам j и k, получим следующие сравнения:

$$\Delta L^{\alpha}_{i[jk]} + L^{\beta}_{i[j} C^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^{\gamma}_{k]} - L^{\alpha}_{l[j} \omega^{l}_{ik]} - L^{\alpha}_{il} \omega^{l}_{[jk]} + \Gamma^{l}_{i[jk]} \omega^{\alpha}_{l} + \Gamma^{l}_{i[j} \omega^{\alpha}_{lk]} - \\ - C^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{\gamma}_{[jk]} \omega^{\beta}_{i} - C^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{\gamma}_{[j} \omega^{\beta}_{ik]} + \omega^{\alpha}_{i[jk]} \cong 0 \pmod{\omega^{k}}. \tag{18}$$

Теперь найдем результат действия дифференциального оператора на компоненты K^{α}_{ijk} объекта кривизны R^2 фундаментально-групповой связности 2-го порядка. Для этого запишем дифференциальные сравнения для свернутых произведений, входящих в формулу (17), и проальтернируем их по индексам j и k:

$$\Delta \Gamma^{l}_{i[j} L^{\alpha}_{lk]} \cong -L^{\alpha}_{l[k} \omega^{l}_{ij]} - \Gamma^{l}_{i[j} \Gamma^{m}_{lk]} \omega^{\alpha}_{m} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{l}_{i[j} \Gamma^{\gamma}_{k]} \omega^{\beta}_{l} - \Gamma^{l}_{i[j} \omega^{\alpha}_{lk]}, \\ \Delta C^{\alpha}_{\beta\gamma} L^{\beta}_{i[j} \Gamma^{\gamma}_{k]} \cong -C^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{l}_{i[j} \Gamma^{\gamma}_{k]} \omega^{\beta}_{l} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} C^{\beta}_{\delta\varepsilon} \Gamma^{\varepsilon}_{[j} \Gamma^{\gamma}_{k]} \omega^{\delta}_{i} - C^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{\gamma}_{[k} \omega^{\beta}_{ij]} - C^{\alpha}_{\beta\gamma} L^{\beta}_{i[j} \omega^{\gamma}_{k]}. \tag{19}$$

Применяя дифференциальный оператор Δ к обеим частям равенства (17), а также учитывая (18) и (19), получим

$$\Delta K^{\alpha}_{ijk} \cong L^{\alpha}_{il} \omega^{l}_{[jk]} - R^{l}_{ijk} \omega^{\alpha}_{l} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{\gamma}_{[jk]} \omega^{\beta}_{i} - C^{\alpha}_{\beta\gamma} C^{\beta}_{\delta\varepsilon} \Gamma^{\varepsilon}_{[j} \Gamma^{\gamma}_{k]} \omega^{\delta}_{i} - \omega^{\alpha}_{i[jk]}. \tag{20}$$

Выражая из уравнений (7) компоненты $\Gamma^{\gamma}_{[jk]}$ через компоненты кривизны R^{γ}_{jk} и подставляя в (20), получим

$$\Delta K^{\alpha}_{ijk} \cong L^{\alpha}_{il} \omega^{l}_{[jk]} - R^{l}_{ijk} \omega^{\alpha}_{l} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} R^{\gamma}_{jk} \omega^{\beta}_{i} - \omega^{\alpha}_{i[jk]}, \tag{21}$$

В случае полуголономного главного расслоения $G_r(M_n)$ 2-го порядка ($\omega^{i}_{[jk]} \cong 0, \omega^{\alpha}_{i[jk]} \cong 0$) дифференциальные сравнения (21) для компонент K^{α}_{ijk} объекта кривизны связности 2-го порядка примут вид

$$\Delta K^{\alpha}_{ijk} \cong -R^{l}_{ijk} \omega^{\alpha}_{l} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} R^{\gamma}_{jk} \omega^{\beta}_{i}. \tag{22}$$

Выводы

1. Фундаментально-групповая связность 2-го порядка задается в продолженном главном расслоении $G^2(M_n)$ со структурными уравнениями (1, 2, 8) с помощью поля объекта $\Gamma^2 = \{\Gamma^{\alpha}_{i}, \Gamma^{i}_{jk}, L^{\alpha}_{ij}\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (5, 11, 15). Объект L^{α}_{ij} определяет формы связности Ω^{α}_{i} (14), удовлетворяющие структурным уравнениям (16), в которые входят компоненты K^{α}_{ijk} (17) объекта кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка Γ^2.

2. Объект кривизны 2-го порядка $R^2 = \{R^{\alpha}_{ij}, R^{i}_{jkl}, K^{\alpha}_{ijk}\}$ содержит:

а) объект кривизны R^{α}_{ij} фундаментально-групповой связности, задаваемой в главном расслоении $G_r(M_n)$;

б) объект кривизны R^{i}_{jkl} аффинной связности над многообразием M_n;

в) компоненты 2-го порядка K^{α}_{ijk}.

3. Объект кривизны R^2 образует геометрический объект лишь в совокупности с компонентами 2-го порядка L^{α}_{ij} объекта связности 2-го порядка Γ^2. В общем случае объект кривизны R^2 фундаментально-групповой связности 2-го порядка не образует тензор (см.: [2; 3]).

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геом. семин. ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 161—178.

2. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

3. *Рязанов Н.А.* Дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка в несимметричном случае // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 95—104.

4. *Шевченко Ю.И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Там же. 2015. Вып. 46. С. 168—177.

Об авторе

Никита Андреевич Рязанов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: ryazanov-92@mail.ru

The author

Nikita Ryazanov, PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: ryazanov-92@mail.ru