7. *Bortolloti E.* Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933. Vol. 3. P. 81 – 89.

8. *Фисунов П.А.* О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной гиперполосе / Чуваш. пед. ин-т. Чебоксары, 1998. Деп. в ВИНИТИ, № 3394-В98.

9. *Он же.* Центропроективные связности в нормальных расслоениях регулярной гиперполосы проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. Вып. 30. С. 89 – 94.

10. *Максакова Т.Ю.* Двойственный образ центрированной тангенциально вырожденной гиперполосы CH_m^r // Там же. С. 50 – 54.

11. Столяров А.В. Двойственные аффинные связности на регулярной гиперполосе // Изв. вузов. Мат. 1999. № 9. С. 55 – 63.

T. Maksakova

CONNECTIONS, ASSOCIATE WITH VACUOUS HYPERSTRIP OF THE PROJECTIVE SPACE

The dual affine connections are constructed and dual projective connections for the centered tangential vacuous hyperstrip in the projective space.

УДК 514.75

В.С. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

О ДИСКРЕТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрены семейства равнобедренных треугольников с целочисленными основаниями, высотами, опущенными на основание, и боковыми сторонами. Доказано существование единственного целочисленного равнобедренного треугольника с высотой p, с основанием $2p$ ($p > 2$) и двух треугольников с боковой стороной $p \geq 5$, где p – простое число ($p \in P$). Определены четыре последовательности, порождаемые множеством простых чисел, и показано, что при $p > 5$ площадь любого целочисленного равнобедренного треугольника с боковой стороной $p \in P$ кратна 60.

Найдены подмножества всех целочисленных равнобедренных треугольников с заданными основанием a, высотой h и боковой стороной c. Даны конкретные примеры таких подмножеств.

§1. Последовательности целочисленных равнобедренных треугольников, порождаемые множеством простых чисел

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием $a = BC$, высотой $h = AD$ и боковой стороной $c = AB = AC$. Назовем треугольник ABC целочисленным, если длины всех его сторон и длина высоты – натуральные числа: $a \in N,\ h \in N,\ c \in N$. Обозначим такой треугольник тройкой чисел (a, h, c). Очевидно, что при любом $\lambda \in N$ треугольник $(\lambda a, \lambda h, \lambda c)$, подобный данному, будет также целочисленным.

Так как $c^2 - h^2 = \dfrac{a^2}{4} \in N$, то основание a любого целочисленного равнобедренного треугольника является четным числом, причем $a \geq 6$, $h \geq 3$, $c \geq 5$ (знаки равенства справедливы для минимального пифагорова треугольника ABD: (4, 3, 5) V (3, 4, 5).

Из диофантовых формул для несократимых пифагоровых треугольников

$$(2mn,\ m^2\text{-}n^2,\ m^2+n^2),\ m,n \in N,\ m > n,\ \text{НОД}(m, n) = 1 \qquad (1.1)$$

(см. [1]) следует, что любой несократимый целочисленный равнобедренный треугольник определяется одной из двух троек натуральных чисел:

$$(4mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2); \qquad (1.2)$$
$$(2(m^2-n^2),\ 2mn,\ m^2+n^2), \qquad (1.3)$$

где $m > n$, НОД$(m, n) = 1$.

Пусть $p > 2$ – произвольное простое число. Из (1.2) следует, что существует единственный целочисленный равнобедренный треугольник с высотой $h = p$:

$$(p^2-1,\ p,\ 1/2(p^2+1)). \qquad (1.4)$$

Простое число $p > 2$ определяет также единственный целочисленный равнобедренный треугольник с основанием $a = 2p$:

$$\left(2p,\ \frac{1}{2}(p^2-1),\ \frac{1}{2}(p^2+1)\right). \qquad (1.5)$$

Возникают две бесконечные последовательности целочисленных равнобедренных треугольников соответственно с высотами $h = p$, основаниями $a = 2p$:

(8, 3, 5); (24, 5, 13); (48, 7, 25); (120, 11, 61); (168, 13, 85); (288, 17, 145), (1.6)

$$(6, 4, 5); (10, 12, 13); (14, 24, 25); (22, 60, 61); (26, 84, 85); (34, 144, 145), \quad (1.7)$$

и соответственно равными боковыми сторонами.

Пусть $p = 4k+1$ ($k \in N$) – произвольное простое число, сравнимое с единицей по модулю 4. По теореме Эйлера оно единственным образом разлагается на сумму квадратов двух натуральных чисел и, следовательно, по формуле (1.1) определяет единственный пифагоров треугольник ABD с гипотенузой $p = AB$. Так как катеты BD и AD прямоугольного треугольника ABD можно менять местами, то простое число $p = 4k+1$ определяет два целочисленных равнобедренных треугольника с боковой стороной p:

$$(4mn, m^2 - n^2, p); \quad (1.8)$$

$$(2(m^2 - n^2), 2mn, p), \quad (1.9)$$

где $p = m^2+n^2$.

Формулы (1.8), (1.9) определяют две бесконечные последовательности целочисленных равнобедренных треугольников с боковой стороной p:

$$(8, 3, 5); (24, 5, 13); (16, 15, 17); (40, 21, 29); (24, 35, 37); (80, 9, 41), \quad (1.10)$$

$$(6, 4, 5); (10, 12, 13); (30, 8, 17); (42, 20, 29); (70, 12, 37); (18, 40, 41), \ldots \quad (1.11)$$

Так как при $p>5$ площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой p кратна 30 [2, с. 55], то при $p >5$ площадь каждого целочисленного равнобедренного треугольника с боковой стороной p кратна 60.

§2. Подмножества целочисленных равнобедренных треугольников с заданной боковой стороной

Пусть $c >4$ – произвольное натуральное число, не являющееся степенью двух:

$$c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}, \quad (2.1)$$

где p_i ($i = \overline{1,r}$) – попарно различные простые числа, $\alpha_i \in N$.

Из выражений (1.2), (1.3) следует, что с может быть боковой стороной целочисленного равнобедренного треугольника тогда и только тогда, когда

$$c = \lambda(m^2+n^2), m \in N, n \in N, m > n. \quad (2.2)$$

Значит, если среди простых чисел p_i нет ни одного числа вида $4k+1$ ($k\in N$), то не существует целочисленных равнобедренных треугольников с боковой стороной $C = AB$.

Пусть число с содержит $q\geq 1$ попарно различных простых множителей вида $4k+1$. Представим его в виде

$$c = sp_1p_2...p_q. \tag{2.3}$$

Известно [3, с.73], что множество всех пифагоровых треугольников с гипотенузой (2.3) состоит из $\sum_{k=1}^{q} 2^{k-1}C_q^k$ треугольников. Так как катеты AD и BD пифагорова треугольника ABD можно менять местами, то множество всех целочисленных равнобедренных треугольников с заданной боковой стороной (2.3) состоит из

$$2\sum_{k=1}^{q} 2^{k-1}C_q^k \tag{2.4}$$

треугольников.

Пусть, например,

$$c = 308763 = 3^2\cdot 7\cdot 13^2\cdot 29. \tag{2.5}$$

Имеем: $c^* = 13\cdot 29 = 377$; $s = 3^2\cdot 7\cdot 13 = 819$. Находим четыре пифагоровых треугольника с гипотенузой c^* [3, с. 70]:

(348, 145, 377); (260, 273, 377); (352, 135, 877); (152, 345, 377) (2.6)

Так как $c = 819c^*$, то умножая пифагоровы тройки (2.6) на 819 и используя формулы (1.2) и (1.3), находим восемь целочисленных равнобедренных треугольников с боковой стороной $c = 308763$:

(570 024, 118755, c); (425 880, 223 587, c); (576 576, 110 565, c);
248 976, 282 555, c); (237 510, 285 012, c); (447 174, 212 940, c); (2.7)
(221 130, 288 288, c); (565 110, 124 488, c).

§3. Подмножества целочисленных равнобедренных треугольников с заданной высотой

Формулы (1.2), (1.3) определяют целочисленные равнобедренные треугольники соответственно с нечетными и четными высотами. Пусть

$$h = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} \tag{3.1}$$

– произвольное нечетное число, большее 1. Обозначим

$$h^* = p_1 p_2 \dots p_k \tag{3.2}$$

и представим число h в виде

$$h = \lambda h^*, \tag{3.3}$$

т.е. $\lambda = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$. Для любого представления числа h^* в виде произведения двух неравных множителей

$$h^* = rs \ (r > s) \tag{3.4}$$

получаем единственный целочисленный равнобедренный треугольник с высотой h:

$$(\lambda(r^2 - s^2),\ h,\ \frac{\lambda}{2}(r^2 + s^2)). \tag{3.5}$$

Из обозначения (3.2) следует, что при k четном разложение числа h^* в произведение двух неравных множителей можно осуществить

$$t_k \equiv C_k^o + C_k^1 + \dots + C_k^{\frac{k}{2} - 1} + \frac{1}{2} C_k^{\frac{k}{2}} \tag{3.6}$$

способами, а при k нечетном –

$$\tilde{t}_k \equiv C_k^o + C_k^1 + \dots + C_k^{[\frac{k}{2}]} \tag{3.7}$$

способами. Здесь символом $[\frac{k}{2}]$ обозначена целая часть числа $\frac{k}{2}$, а $C_k^o \overset{def}{=} 1$.

В частности, при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ соответственно получаем числа t_k: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Пусть, например,

$$h = 51975 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11. \tag{3.8}$$

Имеем $h^* = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$; $\lambda = 3^2 \cdot 5 = 45$. Находим

$$h^* = 1155 \cdot 1 = 385 \cdot 3 = 231 \cdot 5 = 165 \cdot 7 = 105 \cdot 11 = 77 \cdot 15 = 55 \cdot 21 = 35 \cdot 33. \tag{3.9}$$

По формуле (3.5) находим восемь целочисленных равнобедренных треугольников с высотой h = 51 975:

$$\begin{gathered} (60\,031\,080,\ h,\ 30\,015\,585);\ (6\,669\,720,\ h,\ 3\,335\,265); \\ (2\,400\,120,\ h,\ 1\,201\,185);\ (1\,222\,920,\ h,\ 613\,665); \\ (490\,680,\ h,\ 250\,785);\ (256\,680,\ h,\ 138\,465); \\ (1\,16\,280,\ h,\ 77\,985);\ (6\,120,\ h,\ 52\,065). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\tilde{h}$ – произвольное четное число, отличное от степени 2:

$$\tilde{h} = 2^{\alpha_o} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}, \qquad (3.11)$$

где простые p_i попарно различны и отличны от двух.

Из (1.3) следует, что в несократимом целочисленном равнобедренном треугольнике числа m и n должны быть различной четности. Следовательно, $2mn$ кратно четырем, т.е. $\alpha_o \geq 2$.

Представим число h в виде

$$\tilde{h} = \tilde{\lambda}\tilde{h}^*, \qquad (3.12)$$

где

$$\tilde{\lambda} = 2^{\alpha_o - 2} p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_k^{\alpha_k - 1}, \ \tilde{h}^* = 4 p_1 p_2 \ldots p_k. \qquad (3.13)$$

Запишем число $h^* = p_1 p_{2\ldots} p_k$ в виде произведения (3.4) двух различных нечетных множителей. Полагая $m = 2r$, $n = s$, получим целочисленные равнобедренные треугольники с четной высотой (3.11):

$$(2\tilde{\lambda}(4r^2 - s^2),\ \tilde{h},\ \tilde{\lambda}(4r^2 + s^2)),\ r > s. \qquad (3.14)$$

При k четном это можно осуществить t_k способами, и при k нечетном – $\tilde{t}_k$ способами (см.(3.6), (3.7)).

К этим случаям следует добавить те, для которых

$$2s > r. \qquad (3.15)$$

Тогда $m = 2s$, $n = r$ и целочисленные равнобедренные треугольники с высотой $\tilde{h}$ определяются тройками чисел:

$$(2\tilde{\lambda}(4s^2 - r^2),\ \tilde{h},\ \tilde{\lambda}(4s^2 + r^2)). \qquad (3.16)$$

Рассмотрим, например, множество целочисленных равнобедренных треугольников с высотой

$$\tilde{h} = 7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11. \qquad (3.17)$$

Здесь $\tilde{\lambda} = 12$, $h^* = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$. Имеем $h^* = 165 \cdot 1 = 33 \cdot 5 = 15 \cdot 11 = 55 \cdot 3$. Полагая $m = 2 \cdot 165 = 330$, $n = 1$; $m = 2 \cdot 55 = 110$, $n = 3$; $m = 2 \cdot 33 = 66$, $n = 5$; $m = 2 \cdot 15 = 30$, $n = 11$, находим четыре целочисленных равнобедренных треугольника с высотой $\tilde{h} = 7920$:

$$(2\,613\,576,\ \tilde{h},\ 1\,306\,812);\ (290\,184,\ \tilde{h},\ 145\,308); \qquad (3.18)$$
$$(103\,944,\ \tilde{h},\ 52\,572);\ (18\,696,\ \tilde{h},\ 12\,252).$$

Так как $2\cdot 11 > 15$, то существует еще один целочисленный равнобедренный треугольник с высотой $\tilde{h}$, определяемый формулой (3.16):

$$(6216,\ \tilde{h},\ 8508). \tag{3.19}$$

§4. Подмножества целочисленных равнобедренных треугольников с заданным основанием

Пусть

$$a = 2^{\alpha_o} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{4.1}$$

где $p_i > 2$ – попарно различные простые числа. Представим число a в виде

$$a = \lambda \cdot 2 p_1 p_2 \ldots p_k. \tag{4.2}$$

Разобьем произведение $a^* = p_1 p_2 \ldots p_k$ всевозможными способами на два сомножителя: $a^* = rs$. Тогда из формулы (1.3) следует, что целочисленный равнобедренный треугольник с основанием a определяется формулой

$$\left(a,\ \frac{\lambda}{2}\,(r^2 - s^2),\ \frac{\lambda}{2}\,(r^2 + s^2)\right), \tag{4.3}$$

причем при k четном (нечетном) число всех таких треугольников – t_k ($\tilde{t}_k$) (см.(3.6), (3,7)). Если $\alpha_o \le 2$, то других целочисленных равнобедренных треугольников с гипотенузой a нет. Если же $\alpha_o > 2$, то можно представить число a в виде

$$a = \tilde{\lambda} \cdot 4 \cdot 2 p_1 p_2 \ldots p_k \tag{4.4}$$

и кроме треугольников вида (4.3), где $\lambda = 4\tilde{\lambda}$, получить еще t_k (или $\tilde{t}_k$) треугольников:

$$(\tilde{\lambda}\, 4mn,\ \tilde{\lambda}\,(m^2 - n^2),\ \tilde{\lambda}\,(m^2 + n^2)), \tag{4.5}$$

где $m = 2r$, $n = s$, $p_1 p_2 \ldots p_k = a^* = rs$, добавив к ним также треугольники вида (4.5), в которых $m = 2s$, $n = r$ (если $2s > r$).

Пусть, например,

$$a = 11088 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11. \tag{4.6}$$

Имеем $\lambda = 24$, $\tilde{\lambda} = 6$, $a^* = 3\cdot 7\cdot 11 = 231$. Находим

$$a^* = 231 \cdot 1 = 77 \cdot 3 = 33 \cdot 7 = 21 \cdot 11, \quad (4.7)$$

т. е. $r = 231$, $s = 1$; $r = 77$, $s = 3$; $r = 33$, $s = 7$; $r = 21$, $s = 11$.

Получаем по формуле (4.3) четыре целочисленных равнобедренных треугольника с основанием $a = 11\ 088$:

$$(a,\ 640\ 320,\ 640\ 344);\ (a,\ 71\ 040,\ 71\ 256);$$
$$(a,\ 12\ 480,\ 13\ 656);\ (a,\ 3\ 840,\ 6\ 744). \quad (4.8)$$

Так как $\alpha_o = 4 > 2$, то получим по формуле (4.5) еще пять таких треугольников с основанием a, полагая

$$m = 462,\ n = 1;\ m = 154,\ n = 3;\ m = 66,\ n = 7;\ m = 42,\ n = 11;\ m = 22,\ n = 21: \quad (4.9)$$

$$(a,\ 1\ 280\ 658, 1\ 280\ 670);\ (a,\ 142\ 242,\ 142\ 350);$$
$$(a,\ 25\ 842,\ 26\ 430);\ (a,\ 9\ 858,\ 11\ 310);\ (a,\ 258,\ 5\ 550). \quad (4.10)$$

Список литературы

1. *Оре О.* Приглашение в теорию чисел. М., 1980. 128 с.

2. *Малаховский В.С.* О некоторых свойствах базовых последовательностей пифагоровых треугольников // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2002. Вып. 33. С. 54 – 56.

3. *Он же.* Диофантовы семейства пифагоровых треугольников // Там же, 2001. Вып. 32. С. 69 – 73.

V. Malakhovsky

ABOUT DISKRETE SETS
OF INTEGER ISOSCELES TRIANGLES

The sets of isosceles triangles with the integer basis, altitudes omitted on the basis, and lateral parties are considered. The existence of an alone integer isosceles triangle with an altitude p, with the basis 2p (p > 2) and two triangles with the lateral party p ≥ 5, where p – prime number (p∈P) is proved. Four sequences generated by set of simple numbers determined and is shown, that at p > 5 areas of any integer isosceles triangle with the lateral party p∈P is aliquot 60.

The subsets of all integer isosceles triangles with the given basis a, given altitude h and given lateral party c are found. The concrete examples of such subsets are given.