and the typical fiber is stationarity subgroup of the plane. In a homogeneous apparatus this bundle has two factor bundle: the factor bundle of planar linear frames and quotient bundle normal linear frames; and in the nonhomogeneous apparatus associated fiber bundle contains the only principal factor bundle of projective frames. This caused the features of the obtained results in the different analytical apparatuses.

УДК 514.75

М. В. Кретов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Дифференцируемое отображение, порожденное комплексами конусов

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается дифференцируемое отображение, порожденное комплексами конусов со специальными свойствами ассоциированных образов. Геометрически охарактеризованы индикатриса и главное направление исследуемого отображения, характеристическое и фокальное многообразия образующего элемента комплекса.

Ключевые слова: комплекс, эквиаффинное пространство, отображение, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, индикатриса вектора, главное направление, индикатриса отображения, конгруэнция, система уравнений Пфаффа.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассмотрим дифференцируемое отображение

$$f\colon C \to q \in T_{\circ},$$

где C — вершина конуса, q — конус (образующий элемент комплекса $T_{\circ}$, являющегося подклассом комплекса $\hat{T}^{1}_{31}$, рассмотренного в работе [1], когда индикатриса вектора $\overline{e}_1$ описывает однопараметрическое семейство линий с касательными, параллельными этому вектору).

Исследование отображения f будем проводить в репере $r = \{A, \overline{e}_i\}$, i, j, k = $\overline{1,3}$, где A — вершина конуса, векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ лежат в касательной плоскости в вершине конуса и сопряжены между собой, вектор $\overline{e}_3$ направлен по оси образующего элемента, концы p_1 и p_2 соответственно векторов $\overline{e}_1 + \overline{e}_3$ и $\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ лежат на конусе. При этом уравнение конуса q согласно [2] будет иметь вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0. \tag{1}$$

В репере r система уравнений Пфаффа отображения f согласно работам [1; 3; 4] будет иметь вид

$$\begin{gathered} \omega_1^1 = \lambda\theta^1, \omega_3^1 = -(\lambda+1)\theta^1, \omega_3^2 = -\theta^2, \\ \omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_2^2 = \omega_2^3 = \omega_3^3 = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\theta^1 = \omega^1, \theta^2 = \omega^2, \theta^3 = \omega_2^1.$$

По работе [5] отображение f существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Теорема 1. *Комплексы* $T_\circ$ *обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) координатная плоскость $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ *неподвижна;*

2) индикатрисы векторов $\overline{e}_1$ *и* $\overline{e}_2$ *и конец вектора* $\overline{e}_3$ *описывают линии с касательными, параллельными координатной прямой* $(A, \overline{e}_1)$*;*

3) вершина конуса, индикатриса вектора $\overline{e}_3$*, конец вектора* $\overline{e}_1$*, точки координатной прямой* $(A, \overline{e}_1)$ *описывают конгруэнции плоскостей, параллельных плоскости* $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$*.*

Доказательство.

1) Имеем

$$d\overline{e}_1 = \lambda\theta^1\overline{e}_1,\ d\overline{e}_2 = \theta^3\overline{e}_1. \tag{3}$$

Пусть $M_1 = A + x^1\overline{e}_1 + x^2\overline{e}_2$ — текущая точка плоскости $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$. Тогда

$$dM_1 = (dx^1 + \theta^1 + \lambda x^1\theta^1 + x^3\theta^3)\overline{e}_1 + (dx^2 + \theta^2)\overline{e}_2.$$

2) Пусть A_i — концы векторов $\overline{e}_i$.

Это утверждение теоремы следует из выражений (3) и формулы

$$dA_3 = -\lambda\theta^1\overline{e}_1. \tag{4}$$

Последнее утверждение теоремы вытекает из формул

$$\begin{aligned}
&dA = \theta^1\overline{e}_1 + \theta\overline{e}_2,\\
&d\overline{e}_3 = (-\lambda\theta^1 - \theta^1)\overline{e}_1 - \theta^2\overline{e}_2,\\
&dA_1 = (\theta^1 + \lambda\theta^1)\overline{e}_1 + \theta^2\overline{e}_2,\\
&dM_2 = (dx^1 + \theta^1 + x^1\theta^1)\overline{e}_1 + \theta^2\overline{e}_2,
\end{aligned} \tag{5}$$

где M_2=A+$x^1\overline{e}_1$ — текущая точка координатной прямой $(A, \overline{e}_1)$.

Пусть l_1 — прямая, проходящая через точку A_3, параллельно координатной прямой $(A, \overline{e}_2)$, l_2 — прямая, лежащая в плоскости $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_3)$ и проходящая через точку A_3 и точку с координатами $(\frac{1}{\lambda}; 0; 0)$.

Теорема 2. *Характеристическое многообразие [6] конуса q, ассоциированного с комплексами* $T_\circ$*, состоит из прямых* l_1 *и* l_2 *и координатной прямой* $(A, \overline{e}_3)$*.*

Доказательство. Характеристическое многообразие конуса q, ассоциированного с комплексами $T_\circ$, задается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
&\lambda(x^1)^2 + (\lambda+1)x^1x^3 + x^1 = 0,\\
&x^2x^3 - x^2 = 0,\\
&x^1x^2 = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Системе уравнений (6) удовлетворяют только координаты точек прямых l_1, l_2 и $(A, \overline{e}_3)$, причем последняя прямая является двукратной.

Теорема 3. *Фокальное многообразие [6] конуса q, ассоциированного с комплексами* $T_\circ$*, состоит из пяти точек: вершины конуса и четырех концов векторов*

$$\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \overline{e}_1 - \overline{e}_3, \overline{e}_3 - \overline{e}_2 \text{ и } -\frac{1}{2\lambda+1}(\overline{e}_1 + \overline{e}_3).$$

Доказательство. Фокальное многообразие конуса q, ассоциированного с комплексами $T_\circ$, задается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
&(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0,\\
&-\lambda(x^1)^2 + (\lambda+1)x^1x^3 + x^1 = 0,\\
&x^2x^3 - x^2 = 0,\\
&x^1x^2 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Системе уравнений (7) удовлетворяют только координаты указанных в теореме точек.

Пусть X^i — координаты точки C, тогда согласно работе [7] уравнения отображения f примут вид

$$
\begin{aligned}
& a_{11} = 1 - 2\lambda X^1 - 3\lambda^2 (X^1)^2 - \lambda(\lambda+1) X^1 X^3 + \\
& + \lambda X^2 X^3 + \langle 3 \rangle, \\
& a_{12} = a_{21} = -X^3 + 1{,}5\lambda X^1 X^3 + \langle 3 \rangle, \\
& a_{22} = 1 + (X^3)^2 + \langle 3 \rangle, \\
& a_{23} = a_{32} = X^2 - (\lambda+1) X^1 X^3 + 0{,}5 X^2 X^3 + \langle 3 \rangle, \\
& a_{33} = -1 + (\lambda+1)^2 (X^1)^2 + (X^2)^2 - 0{,}5(\lambda+1) X^2 X^3 + \langle 3 \rangle, \qquad (8) \\
& a_{13} = a_{31} = (\lambda+1) X^1 - 2\lambda(\lambda+1)(X^1)^2 - 0{,}5(\lambda+1) X^2 X^3 + \\
& + 0{,}5(\lambda+1)^2 X^1 X^3 + \langle 3 \rangle, \\
& a_1 = -X^1 + 2\lambda (X^1)^2 + X^2 X^3 - (\lambda+1) X^1 X^3 + \langle 3 \rangle, \\
& a_2 = -X^2 - X^2 X^3 + X^1 X^3 + \langle 3 \rangle, \\
& a_3 = X^3 - (\lambda+1)(X^1)^2 - (X^2)^2 + \langle 3 \rangle,
\end{aligned}
$$

где символ $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов порядка малости не меньше трех относительно приращений координат точки области определения.

Теорема 4. *Индикатриса отображения f совпадает с конусом $K_f(0)$ — главных направлений отображения f и состоит из вершины конуса.*

Доказательство. Согласно работе [3] уравнения индикатрисы I_f отображения f имеют вид

$$
\begin{aligned}
& 6\lambda^2 (X^1)^2 - 2\lambda(\lambda+1) X^1 X^3 + 2\lambda X^2 X^3 + 4\lambda X^1 = 0, \\
& 3\lambda X^1 X^3 + 2 X^3 = 0, \\
& \lambda X^1 X^3 + 2 (X^3)^2 = 0, \\
& 4\lambda(\lambda+1)(X^1)^2 - (\lambda+1)^2 X^1 X^3 + (\lambda+1) X^2 X^3 + 2(\lambda+1) X^1 = 0, \\
& (\lambda+1) X^1 X^3 + (\lambda+1) X^1 X^3 + X^2 X^3 - 2 X^2 = 0, \qquad (9) \\
& 2(\lambda+1)^2 (X^1)^2 + 2 (X^2)^2 - (\lambda+1) X^2 X^3 = 0, \\
& -2\lambda (X^1)^2 + (\lambda+1) X^1 X^3 - X^2 X^3 - X^1 = 0, \\
& X^1 X^3 - X^2 X^3 + X^2 = 0, \\
& (\lambda+1)(X^1)^2 + (X^2)^2 - X^3 = 0.
\end{aligned}
$$

По методике, изложенной в работе [7], находим уравнения $K_f(0)$ — главных направлений отображения f. Эти уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&6\lambda^2(\Lambda^1)^2 - 2\lambda(\lambda+1)\Lambda^1\Lambda^3 + 2\lambda\Lambda^2\Lambda^3 = 0,\\
&\lambda\Lambda^1\Lambda^3 = 0,\\
&-4\lambda(\lambda+1)(\Lambda^1)^2 + (\lambda+1)^2\Lambda^1\Lambda^3 - (\lambda+2)\Lambda^2\Lambda^3,\\
&(\Lambda^3)^2 = 0,\\
&-2(\lambda+1)\Lambda^1\Lambda^3 + \Lambda^2\Lambda^3 = 0,\\
&-2(\Lambda^2)^2 - (\lambda+1)\Lambda^2\Lambda^3 = 0,\\
&-2\lambda(\Lambda^1)^2 - \Lambda^2\Lambda^3 + (\lambda+1)\Lambda^1\Lambda^3 = 0,\\
&\Lambda^2\Lambda^3 - \Lambda^1\Lambda^3 = 0,\\
&(\lambda+1)(\Lambda^1)^2 + (\Lambda^2)^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Из уравнений (9) и (10) непосредственно следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы конусов // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 45—49.
2. *Комиссарук А.М.* Аффинная геометрия. Минск, 1977.
3. *Кретов М.В.* Дифференируемые отображения, ассоциированные с многообразиями гиперквадрик // Международная конференция по геометрии и приложениям. Смолян, 1986. С. 23.
4. *Кретов М.В.* О подклассах дифференцируемого отображения, порожденного комплексами гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 70—74.
5. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.
6. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометрич. семинар / ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. Т. 6. С. 113—133.

7. *Кретов М.В.* О главных точках дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 51—58.

M. Kretov

Differential mapping generated by complexes of cones

In three-dimensional equiaffine space we consider differentiable mapping generated by complexes of cones with special properties of associated images. Indicatrix and the main direction of the investigated mapping, characteristic and focal manifold for the forming element of the complex are geometrically characterized.

УДК 514.75

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

О внутреннем оснащении одного семейства гиперплоских элементов

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство $B_{p,q}$ гиперплоских элементов. Ставится задача построения внутреннего оснащения данного семейства. Эта задача решается в случае семейства специального вида. Решение основано на методе подвижного репера и исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана.

Ключевые слова: проективное пространство, гиперплоский элемент, семейство гиперплоских элементов, проективно-дифференциальная геометрия, оснащение, метод внешних форм, расслоение реперов, редукция расслоения реперов.