УДК 514.756

***Е. Н. Смирнова***

*(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)*

# КВАДРАТИЧНОЕ ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Выведены дифференциальные уравнения квадратичного гиперполосного распределения $m$-мерных линейных элементов в $n$-мерном проективно-метрическом пространстве.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,n};\quad I, K, L = \overline{1,n};$$

$$i, j, k, s, t = \overline{1,m};\quad u, v, w, x = \overline{m+1, n-1};\quad a, b = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим $n$-мерное проективное пространство $P_n$; деривационные формулы проективного репера $R = \{A_{\bar{I}}\}$ и структурные уравнения проективного пространства имеют соответственно вид [7]:

$$dA_{\bar{I}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}, \tag{1}$$

$$D\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}}, \omega_{\bar{L}}^{\bar{L}} = 0. \tag{2}$$

Согласно монографии [2], пространством $K_n$ с проективной метрикой, или, что то же самое, проективно-метрическим пространством [1], называется проективное пространство $P_n$, в котором задана неподвижная гиперквадрика $Q_{n-1}^2$ (абсолют).

Уравнение абсолюта $Q_{n-1}^2$ имеет вид:

$$g_{\bar{I}\bar{K}} x^{\bar{I}} x^{\bar{K}} = 0, g_{[\bar{I}\bar{K}]} = 0, \tag{3}$$

причем условие его неподвижности определяется уравнениями [1]:

$$dg_{\overline{IK}} - g_{\overline{IL}}\omega_{\overline{K}}^{\overline{L}} - g_{\overline{LK}}\omega_{\overline{I}}^{\overline{L}} = \theta g_{\overline{IK}}. \tag{4}$$

В пространстве $K_n$ рассмотрим гиперполосное распределение [4] $H$ $m$-мерных линейных элементов ($m < n-1$). Центр $A$ элемента лежит на абсолюте $Q_{n-1}^2$, а текущий элемент $\pi_{n-1}(A)$ оснащающего распределения совпадает с касательной гиперплоскостью $T_{n-1}(A)$ к $Q_{n-1}^2$ в точке $A$. Такое гиперполосное распределение $H$ назовем квадратичным.

Известно [4], что дифференциальные уравнения гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов в репере нулевого порядка (т. е. $A \equiv A_0$, $A_i$) принадлежат текущей плоскости $\pi_m(A) \subset T_{n-1}(A)$ базисного распределения и $A_\upsilon \in T_{n-1}(A)$ имеют вид:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \omega_i^\upsilon = \Lambda_{iK}^\upsilon \omega_0^K, \omega_\upsilon^n = \Lambda_{\upsilon K}^n \omega_0^K. \tag{5}$$

В выбранном репере справедливы равенства:

$$g_{00} = g_{i0} = g_{v0} = 0. \tag{6}$$

Предполагая, что абсолют (5) невырожден, в силу (6) имеем

$$(g_{0n})^2 \cdot \begin{vmatrix} g_{ij} g_{iv} \\ g_{uj} g_{uv} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

За счет нормировки коэффициентов гиперквадрики можно добиться, чтобы

$$g_{0n} = 1. \tag{8}$$

Из дифференциального уравнения (4) для $g_{00} = 0$ с учетом (7) находим

$$\omega_0^n = 0. \tag{9}$$

Согласно (5), (9), квадратичное распределение $H$ в репере нулевого порядка определяется системой дифференциальных уравнений

$$\omega_i^n = \Lambda_{ia}^n \omega_0^a, \omega_i^v = \Lambda_{ia}^v \omega_0^a, \omega_v^n = A_{va}^n \omega_0^a. \qquad (10)$$

Из дифференциальных уравнений (4), для $g_{iv}$ с использованием (9), (10) находим

$$\nabla g_{iv} - g_{ij}\omega_v^j = \theta g_{iv} + \left(g_{in}A_{va}^n + g_{uv}\Lambda_{ia}^u + g_{nv}\Lambda_{ia}^n\right)\omega_0^a; \qquad (11)$$

последние уравнения говорят о том, что в предположении невырожденности тензора $g_{ij}$, согласно лемме Н. М. Остиану [3], возможна частичная канонизация репера, при которой

$$g_{iv} = 0. \qquad (12)$$

Геометрическая характеристика последней канонизации репера заключается в том, что его вершины $A_v$ располагаются в плоскости $\pi_{n-m-1} \equiv [A_0 A_v]$, полярно сопряженной с плоскостью $\pi_m \equiv [A_0 A_i]$ относительно абсолюта (3). Полученный репер назовем репером первого порядка.

Отметим, что в силу (7), (12) тензоры $g_{ij}$, $g_{uv}$ являются невырожденными:

$$\Lambda \overset{def}{=} \left|g_{ij}\right| \neq 0, A \overset{def}{=} \left|g_{uv}\right| \neq 0, g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i, g^{uw}g_{wv} = \delta_v^u. \qquad (13)$$

Из дифференциальных уравнений (4) равенств (6), (8) с учетом (9), (12) находим

$$\Lambda_{ij}^n = -g_{ij}, A_{uv}^n = -g_{uv}, \Lambda_{iv}^n = A_{vi}^n = 0, \qquad (14\text{ а})$$

$$\theta = -\left(\omega_0^0 + \omega_n^n + g_{na}\omega_0^a\right). \qquad (14\text{ б})$$

Заметим, что:

а) в силу $\Lambda_{iv}^n = 0$ квадратичное распределение $H$ является взаимным [4];

б) в силу $A_{vi}^n = 0$ плоскость $\pi_{n-m-1}(A_0) \equiv [A_0 A_v]$ есть характеристика касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A_0)$ к абсолюту $Q_{n-1}^2$ в точке $A_0 \in Q_{n-1}^2$, причем распределение характеристик является взаимным;

в) в силу $\left|\Lambda_{ij}^{n}\right| \neq 0, \left|A_{uv}^{n}\right| \neq 0$ (см. (13), (14 а)) распределение $H$ и распределение характеристик являются регулярными.

Из уравнений (11) с учетом (12), (14 а) имеем

$$\omega_v^i = N_{va}^i \omega_0^a, \qquad (15)$$

где

$$N_{vj}^i = -g^{is}\left(g_{vu}\Lambda_{sj}^u + g_{nv}\Lambda_{sj}^n\right),\ N_{vw}^i = -g^{is}\left(g_{sn}A_{vw}^n + g_{vu}\Lambda_{sw}^u\right). \qquad (16)$$

Из соотношений (16) следует, что для квадратичного распределения $H$ в $K_n$ функции $N_{va}^i$ определены в первой дифференциальной окрестности (в отличие от общего гиперполосного распределения $H$ в $P_n$ [4], для которого функции $N_{vK}^i$ относятся ко второй дифференциальной окрестности).

В выбранном репере первого порядка:

1) в силу соотношений (3), (6), (8), (12) уравнение абсолюта $Q_{n-1}^2$ имеет вид:

$$g_{ij}x^i x^j + g_{uv}x^u x^v + g_{nn}\left(x^n\right)^2 + 2g_{in}x^i x^n +$$
$$+ 2g_{un}x^u x^n + 2x^0 x^n = 0; \qquad (17)$$

2) в силу соотношений (14 а), (15) уравнения (10) квадратичного распределения $H$ запишутся в виде:

$$\omega_i^n = -g_{ij}\omega_0^j, \omega_i^v = \Lambda_{ia}^v \omega_0^a, \omega_v^n = -g_{vu}\omega_0^u, \omega_v^i = N_{va}^i \omega_0^a. \qquad (18)$$

Из соотношений (16) находим:

$$\Lambda_{[ij]}^v = 0 \Leftrightarrow N_{v[i}^s g_{j]s} = 0, \qquad (19\text{ а})$$

$$N_{[uv]}^s = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{s[u}^w g_{v]w} = 0. \qquad (19\text{ б})$$

Отметим, что (19 а) есть условие голономности [4] базисного распределения $m$-мерных линейных элементов, а (19 б) — условие голономности распределения характеристик $\pi_{n-m-1}$.

Коэффициенты $g_{IK}$ уравнения абсолюта (17) в силу (4), (8), (14), (18) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla g_{ij} + g_{ij}\left(\omega_0^0 + \omega_n^n\right) = -g_{(ij}g_{k)n}\omega_0^k - g_{ij}g_{wn}\omega_0^w, \qquad (20_1)$$

$$\nabla g_{uv} + g_{uv}\left(\omega_0^0 + \omega_n^n\right) = -g_{(uv}g_{w)n}\omega_0^w - g_{uv}g_{kn}\omega_0^k, \qquad (20_2)$$

$$dg_{nn} + g_{nn}\left(\omega_0^0 - \omega_n^n\right) - 2\left(g_{nk}\omega_n^k + g_{nw}\omega_n^w + \omega_n^0\right) = -g_{nn}g_{na}\omega_0^a, \qquad (20_3)$$

$$dg_{ni} + g_{ni}\omega_0^0 - g_{nk}\omega_i^k - g_{ik}\omega_n^k - \omega_i^0 =$$
$$= -g_{ni}g_{na}\omega_0^a + g_{nw}\omega_i^w + g_{nn}\omega_i^n, \qquad (20_4)$$

$$dg_{nv} + g_{nv}\omega_0^0 - g_{nw}\omega_v^w - g_{vw}\omega_n^w - \omega_v^0 =$$
$$= -g_{nv}g_{na}\omega_0^a + g_{nk}\omega_v^k + g_{nn}\omega_v^n. \qquad (20_5)$$

Продолжая уравнения (18), получим ($20_1$), ($20_2$) и

$$\nabla\Lambda_{ij}^v + \Lambda_{ij}^v\omega_0^0 - g_{ij}\omega_n^v = \Lambda_{ija}^v\omega_0^a,$$
$$\nabla\Lambda_{iu}^v + \Lambda_{iu}^v\omega_0^0 - \delta_u^v\omega_i^0 = \Lambda_{iua}^v\omega_0^a,$$
$$\nabla N_{vj}^i + N_{vj}^i\omega_0^0 - \delta_j^i\omega_v^0 = N_{vja}^i\omega_0^a, \qquad (21)$$
$$\nabla N_{vu}^i + N_{vu}^i\omega_0^0 - g_{vu}\omega_n^i = N_{vua}^i\omega_0^a,$$

где

$$\Lambda_{i[jk]}^v = \Lambda_{iw}^v\Lambda_{[jk]}^w, \Lambda_{i[uw]}^v = \Lambda_{ij}^v N_{[uw]}^j,$$
$$\Lambda_{iju}^v - \Lambda_{iuj}^v = \Lambda_{iw}^v\Lambda_{ju}^w - \Lambda_{is}^v N_{uj}^s, \qquad (22)$$
$$N_{v[jk]}^i = N_{vw}^i\Lambda_{[jk]}^w, N_{v[uw]}^i = N_{vj}^i N_{[uw]}^j,$$
$$N_{vju}^i - N_{vuj}^i = N_{vw}^i\Lambda_{ju}^w - N_{vs}^i N_{uj}^s.$$

В соотношениях (13) функции $g^{ij}, g^{uv}, \Lambda, A,$ а также $\Phi \overset{def}{=} \Lambda \cdot A$ в силу ($20_1$), ($20_2$) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla g^{ij} - g^{ij}\left(\omega_0^0 + \omega_n^n\right) = g^{ij}g_{na}\omega_0^a + g_{nk}g^{k(i}\omega_0^{j)},$$
$$\nabla g^{uv} - g^{uv}\left(\omega_0^0 + \omega_n^n\right) = g^{uv}g_{na}\omega_0^a + g_{nw}g^{w(u}\omega_0^{v)}; \qquad (23)$$

$$d\ln\Lambda - (m+2)\omega_k^k - m\omega_w^w = -\left[(m+2)g_{nk}\omega_0^k + mg_{nw}\omega_0^w\right],$$
$$d\ln A - (n-m+1)\omega_w^w - (n-m-1)\omega_k^k =$$
$$= -\left[(n-m+1)g_{nw}\omega_0^w + (n-m-1)g_{nk}\omega_0^k\right], \qquad (24)$$
$$d\ln\Phi + (n+1)\left(\omega_0^0 + \omega_n^n\right) = -(n+1)g_{na}\omega_0^a.$$

Построенные поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов на подмногообразии $H$ найдут существенные применения в последующих работах автора при разработке двойственной полярной теории квадратичного гиперполосного распределения в проективно-метрическом пространстве $K_n$. В заключение отметим следующее: *абсолют* $Q^2_{n-1}$ *пространства* $K_n$ *имеет соприкосновение до 3-го порядка включительно как с исходным квадратичным распределением H, так и с распределением его характеристик.*

### *Список литературы*


1. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.
2. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
3. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl (RPR). 1962. Т. 7. №2. С. 231—240.
4. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.
5. *Столяров А.В.* Двойственная теория регулярных гиперполос и ее приложения.. Чебоксары: Изд-во Чувашск. гос. ун-та, 1994.
6. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары: Изд-во Чувашск. гос. пед. ун-та, 1994.
7. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.


E. Smirnova

## QUADRATIC HYPERSTRIP DISTRIBUTION IN THE PROJECTIVE METRIC SPACE

The differential equations of quadratic hyperstrip distribution are deduced in the projective metric space.