Т е о р е м а 4. Ортогональные пары $\tilde{T}$ конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями существуют с произволом двух функций одного аргумента. Такие пары есть равнонаклонные пары II-типа, у которых постоянно расстояние между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ортогональные пары T конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями есть пары $\bar{T}$, следовательно, они определяются системой уравнений (1), к которой надо присоединить условия (5). Из (5) следует, что $\rho_1 = \rho_2' = 0$ $(S=0)$. Такую систему можно привести к виду $A_1 = A_2 = A$, $A = Q_1 \frac{1}{\rho_1'}$,

$$H_1 = -Q_1 \frac{1}{\rho_2}, \quad H_2 = Q_1 \frac{\rho_2}{(\rho_1')^2}, \quad Q_2 = Q_1 \frac{\rho_2}{\rho_1'}. \qquad (6)$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом и подставляя выражения A, H_1, H_2, Q_2 из системы (6), получим четыре квадратичных уравнения. Вычитая из второго квадратичного уравнения третье, получим

$$Q_1 \wedge \left(\Omega_{23} + \Omega_{13} \frac{1}{\rho_1'}\right) \frac{(\rho_1')^2 - (\rho_2)^2}{(k_1 - k_2)(\rho_1')^2(\rho_2)^2} = 0, \qquad (7)$$

откуда следует, что может быть две возможности: а/ $|\rho_1'| = |\rho_2|$ (будем считать, что $\rho_1' = -\rho_2$, ибо случай $\rho_1' = \rho_2$ сводится к предыдущему), и б/ $Q_1 \wedge \left(\Omega_{23} + \Omega_{13} \frac{1}{\rho_1'}\right) = 0$.
Можно показать, что случай б/ приводит к противоречию. В случае а/ система имеет два независимых квадратичных уравнения. Неизвестных функций тоже две: Q_1, $d\rho_2$. Исследование показывает, что произвол существования - две функции одного аргумента. Из условия а/ следует, что $\rho_1' = -\rho_2$. Из условия (5) — $\rho_2' = \rho_1 = 0$. Следовательно, рассматриваемые пары есть равнонаклонные пары 2-го типа ([1], с.14). При $\rho_1' = -\rho_2$ в системе (6) $H_1 = H_2$. Отсюда следует, что расстояние между соответствующими прямыми постоянно. Теорема доказана.

Список литературы

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар T конгруэнций. Деп. ВИНИТИ, 14.07.1980, М., №2993, МII, б/о189
2. Редозубова О.С. Об одном специальном виде пар T конгруэнций. - Уч.зап. МГПИ им. В.И. Ленина, М., 1963.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I5 1984

УДК 514.75

А.В. С т о л я р о в

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННОМ ГИПЕРПОЛОСНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Двойственные проективные связности, индуцируемые оснащением в смысле Э.Картана [8] регулярной m-мерной гиперполосы H_m в пространстве проективной связности $P_{n,n}$ (в проективном пространстве P_n), автором изучались в работах [5], [6].

В настоящей работе освещаются некоторые вопросы двойственной теории гиперполосного распределения [3] m-мерных линейных элементов $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ ($m < n-1$), оснащенного в смысле Э.Картана. На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения $\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = \overline{1,n}$; $i,j,k,\ell,s,t = \overline{1,m}$; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = \overline{0,m}$; $u, v, w = \overline{m+1,n-1}$; $\alpha, \rho, \gamma = \overline{m+1,n}$.

1. В n-мерном пространстве проективной связности $P_{n,n}$ рассмотрим регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов $\mathcal{H}$ [3]; в репере первого порядка $\{A_0, A_{\mathcal{J}}\}$ дифференциальные уравнения многообразия $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ имеют вид:

$$\omega_i^n = \Lambda_{i\mathcal{K}}^n \omega_0^{\mathcal{K}}, \quad \omega_i^v = M_{i\mathcal{K}}^v \omega_0^{\mathcal{K}}, \quad \omega_v^n = \Lambda_{v\alpha}^n \omega_0^{\alpha}, \quad \omega_v^i = N_{v\mathcal{K}}^i \omega_0^{\mathcal{K}}. \qquad (1)$$

Пусть распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ оснащено в смысле Э. Картана [8] полями геометрических объектов $\{\nu_v^0\}$, $\{\nu_n^i, \nu_n^0, a_n^v\}$:

$$\begin{gathered} \nabla_d \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{n\mathcal{K}}^i \omega_0^{\mathcal{K}}, \\ \nabla_d \nu_v^0 + \omega_v^0 = \nu_{v\mathcal{K}}^0 \omega_0^{\mathcal{K}}, \\ \nabla_d \nu_n^0 + \nu_n^j \omega_j^0 + a_n^u \omega_u^0 + \omega_n^0 = \nu_{n\mathcal{K}}^0 \omega_0^{\mathcal{K}}, \end{gathered} \qquad (2)$$

где квазитензор $a_n^v = \frac{1}{m} \Lambda_n^{ij} M_{ji}^v$. Точки $N_u = \nu_u^0 A_0 + A_u$, $N_n = \nu_n^0 A_0 + \nu_n^j A_j + a_n^v A_v + A_n$ определяют поле оснащающих плоскостей $N_{n-m-1}(A_0) \equiv [N_n N_v]$ и прямая $h(\nu) \equiv [A_0 N_n]$

инвариантна относительно преобразований стационарной подгруппы элемента распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$. Плоскость $\mathcal{N}_{n-m-2}(A_0^{\cdot}) \equiv [\mathcal{N}_v]$ называется осью [6] оснащающей плоскости.

В качестве квазитензора ν_v^0 можно взять, например:

$$\nu_v^0 = -\frac{1}{m} \mathcal{N}_{vj}^j, \qquad (3)$$

при этом плоскость $[\mathcal{N}_v]$ называется осью Кенигса;

$$\nu_v^0 = \frac{1}{m}[\Lambda_n^{ji} \Lambda_{ijv}^n + (m+2)\Lambda_{jv}^n \nu_n^j] + A_{uv}^n a_n^u. \qquad (4)$$

В качестве функции ν_n^0 можно взять, в частности,

$$\nu_n^0 = -\frac{1}{m}(\nu_{ni}^i - \Lambda_{ij}^n \nu_n^i \nu_n^j) + \frac{1}{m} a_n^v \mathcal{N}_{vi}^i, \qquad (5)$$

которая определяет точку Кенигса инвариантной прямой $h(\nu)$;

$$\nu_n^0 = \frac{1}{2}(S_n + a_{ij}^n \nu_n^i \nu_n^j + B_{uv}^n a_n^u a_n^v) + \frac{1}{m+2} b_i \nu_n^i + b_v a_n^v, \qquad (6)$$

определяющая точку пересечения прямой $h(\nu)$ с соприкасающейся гиперквадрикой (см. [3]) $a_{ij}^n x^i x^j + 2\frac{b_i}{m+2} x^i x^n +$

$$+ B_{uv}^n x^u x^v + 2 b_v x^v x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n. \qquad (7)$$

Нами показано, что при таком оснащении на распределении $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ индуцируется пространство $\overset{1}{P}_{n,m}$ с линейной связностью проективного типа (короче: пространство проективной связности), определяемое системой форм $\{\omega_0^{\mathcal{K}}, \overset{1}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}\}$; слоевые формы $\overset{1}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ имеют строение:

$$\begin{aligned} &\overset{1}{\omega}{}_0^i = \omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n, \quad \overset{1}{\omega}{}_i^j = \omega_i^j - \nu_n^j \omega_i^n, \\ &\overset{1}{\omega}{}_0^0 = \omega_0^0 - \nu_v^0 \omega_0^v - (\nu_n^0 - \nu_v^0 a_n^v)\,\omega_0^n, \\ &\overset{1}{\omega}{}_i^0 = \omega_i^0 - \nu_v^0 \omega_i^v - (\nu_n^0 - \nu_v^0 a_n^v)\,\omega_i^n. \end{aligned} \qquad (8)$$

Справедливо следующее предложение.

Для распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ смещение оснащающей плоскости $\mathcal{N}_{n-m-1}(\nu)$ не выходит за пределы нормали первого рода ν_n^i тогда и только тогда, когда оснащающая плоскость неподвижна; при этом $\mathcal{N}_{n-m-1}(\nu)$ является плоскостью Кенигса нормали $\nu_n^i = \frac{1}{n-m-1} \mathcal{N}_{vu}^i A_n^{uv}$ (см. [3], [7]) и пространство $\overset{1}{P}_{n,m}$ является плоским.

2. Согласно [1] другое пространство с линейной связностью проективного типа $\overset{2}{P}_{n,m}$ определяется системой форм $\{\omega_0^{\mathcal{J}}, \overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}\}$; слоевые формы $\overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ получаются преобразованием

$$\overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \overset{1}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}} + \overset{2}{\Pi}{}_{\bar{i}\mathcal{K}}^{\bar{j}} \omega_0^{\mathcal{K}}.$$

Для распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ с симметрическим тензором Λ_{ij}^n система слоевых форм $\overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [2], если в качестве функций $\overset{2}{\Pi}{}_{\bar{i}\mathcal{K}}^{\bar{j}}$ взять следующие охваты:

$$\begin{aligned} &\overset{2}{\Pi}{}_{0\mathcal{K}}^j = \overset{2}{\Pi}{}_{0\mathcal{K}}^0 = 0, \quad \overset{2}{\Pi}{}_{ik}^j = \frac{1}{m+2}\Lambda_n^{js} b_{sik}^n, \\ &\overset{2}{\Pi}{}_{ij}^0 = \frac{1}{m+2}\Big(\frac{1}{m+2}\Lambda_n^{ts} b_t b_{sij}^n + b_{sij}^n \nu_n^s\Big), \\ &\overset{2}{\Pi}{}_{iu}^0 = \overset{2}{\Pi}{}_{iu}^s \Big(\frac{1}{m+2} b_s + \Lambda_{sl}^n \nu_n^l\Big), \\ &\overset{2}{\Pi}{}_{in}^j = -(\overset{2}{\Pi}{}_{is}^j \nu_n^s + \overset{2}{\Pi}{}_{iv}^j a_n^v), \quad \overset{2}{\Pi}{}_{in}^0 = -(\overset{2}{\Pi}{}_{is}^0 \nu_n^s + \overset{2}{\Pi}{}_{iv}^0 a_n^v), \end{aligned} \qquad (9)$$

где функции b_i и b_{ijk}^n имеют строения (см. [3]):

$$b_i = \Lambda_n^{jk} \Lambda_{ijk}^n, \quad b_{ijk}^n = (m+2)\Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n b_{k)}.$$

В охватах (9) в качестве функций $\overset{2}{\Pi}{}_{iv}^j$ можно взять, например, любой из следующих тензоров:

$$\overset{2}{\Pi}{}_{iv}^j = \mathcal{D}_{iv}^j(\nu) \overset{\mathrm{def}}{=} \Lambda_{is}^n \Lambda_n^{jl} \mathcal{N}_{vl}^s + \nu_v^0 \delta_i^j; \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Pi}{}_{iv}^j = b_{iv}^j(\nu) \overset{\mathrm{def}}{=} &\Lambda_n^{jk}(\Lambda_{kiv}^n + \Lambda_{kv}^n \Lambda_{si}^n \nu_n^s) + \\ &+ \Lambda_{iv}^n \nu_n^j - \delta_i^j(\nu_v^0 - \Lambda_{sv}^n \nu_n^s - A_{uv}^n a_n^u). \end{aligned} \qquad (11)$$

Справедливы следующие предложения:

1. При охватах (9), (11) пространства $\overset{1}{P}_{n,m}$ и $\overset{2}{P}_{n,m}$ двойственны [4] друг другу.

2. При охватах (9), (10) пространства $\overset{1}{P}_{n,m}$ и $\overset{2}{P}_{n,m}$ двойственны друг другу тогда и только тогда, когда тензор $\mathcal{D}_{iv}^j(\nu)$ обращается в нуль; при этом ось $[\mathcal{N}_v]$ оснащающей плоскости есть ось Кенигса.

3. В случае $P_{n,n} \equiv P_n$ для распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ с симмет-

рическим тензором Λ^n_{ij} обращение в нуль тензора $\mathcal{D}^j_{iv}(\nu)$ равносильно тому, что при смещении центра A_0 распределения вдоль любой кривой, принадлежащей его базисному [3] распределению, смещение оси $[\mathcal{N}_v]$ оснащающей плоскости принадлежит характеристике $\Pi_{n-m-1}(A_0)$ оснащающего [3] распределения гиперплоскостных элементов.

4. При охватах (9), (10) условием совпадения связностей пространств $\overset{1}{P}_{n,m}$ и $\overset{2}{P}_{n,m}$ является одновременное обращение в нуль тензоров b^n_{ijk} и $\mathcal{D}^j_{iv}(\nu)$. При $P_{n,n}\equiv P_n$ для голономного или взаимного [3] распределения $\mathcal{H}\subset P_n$ это условие равносильно тому, что соприкасающиеся гиперквадрики поля (7) имеют касание 3-го порядка с распределением и при смещении центра A_0 распределения вдоль любой кривой, принадлежащей базисному распределению, смещение оси $[\mathcal{N}_v]$ оснащающей плоскости принадлежит характеристике $\Pi_{n-m-1}(A_0)$.

5. При охватах (9), (11) условием совпадения связностей пространств $\overset{1}{P}_{n,m}$ и $\overset{2}{P}_{n,m}$ является одновременное обращение в нуль тензоров b^n_{ijk} и $b^j_{iv}(\nu)$; при этом ось $[\mathcal{N}_v]$ оснащающей плоскости определяется функциями (4).

6. В случае голономного распределения $\mathcal{H}$ пространства $P_{n,n}$ без кручения выражение подтензора $\overset{2}{R}{}^j_{ist}$ тензора кривизны-кручения пространства $\overset{2}{P}_{n,m}$ не зависит от выбора охватов тензора $\Pi^j_{iv}(\nu)$ (см. (10),(11)).

7. Если подтензор $\overset{2}{R}{}^j_{ist}$ тензора кривизны-кручения пространства $\overset{2}{P}_{n,m}$, индуцируемого оснащением голономного распределения $\mathcal{H}\subset P_n$ неподвижной плоскостью $\mathcal{N}_{n-m-1}$ обращается в нуль, то полем нормалей первого рода ν^i_n служит поле директрис Вильчинского (см.[3]).

Отметим, что в условиях этой теоремы согласно теореме п.1 поле директрис Вильчинского совпадает с полем нормалей $\nu^i_n=\frac{1}{n-m-1}\mathcal{N}^i_{vu}A^{uv}_n$, оснащающая плоскость есть плоскость Кенигса директрисы и пространство $P_{n,m}$ является плоским.

8. Если $m>2$, то в условиях теоремы 7 при охватах (9), (10) пространство $\overset{2}{P}_{n,m}$ является плоским.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-Тр.4 Всес.математ.съезда (1961), 1964, 2, с.226-233.

2. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр.Геометрич.семинара, ВИНИТИ, 1973, 4, с.7-70.

3. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов.-Итоги науки и техники.Серия "Проблемы геометрии", ВИНИТИ, 1975, 7, с.117-151.

4. Столяров А.В. Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности.-Итоги науки и техники.Серия "Проблемы геометрии", ВИНИТИ, 1977, 8, с.25-46.

5. Столяров А.В. Двойственные проективные связности на оснащенной регулярной гиперполосе пространства проективной связности.-Тезисы докл. 5 Прибалтийской геометрич.конф.Друскининкай, 1978, с.84.

6. Столяров А.В. Дифференциальная геометрия полос.-Итоги науки и техники.Серия "Проблемы геометрии", ВИНИТИ, 1978, 10, с.25-54.

7. Столяров А.В. Двойственная теория гиперполосного распределения и ее приложения.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, 1982, Вып.13, с.95-102.

8. Cartan E. Les espaces á connexion projective. -Тр.семинара по векторному и тензорному анализу, 1937, 4, с.147-159.