ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Ю.И. Попов

ВНУТРЕННИЕ ОСНАЩЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ m-МЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ H^{τ}_{m} РАНГА τ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n вырожденные нормально центрированные m-мерные гиперполосы CH^{τ}_{m} ранга τ, вдоль каждой плоской образующей E_s (где $s=m-\tau$) базисной поверхности V^{τ}_{m} которых касательная плоскость T_m постоянна [1]. В данной работе исследуются нераспадающиеся гиперполосы CH^{τ}_{m}, т.е. такие гиперполосы CH^{τ}_{m}, для которых гиперповерхность V_{n-1}, огибающая главные касательные гиперплоскости τ гиперполосы CH^{τ}_{m}, не распадается на две тангенциально вырожденные поверхности V^{τ}_{m} и V^{τ}_{n-s-1} с общей направляющей поверхностью V_{τ} (V_{τ} — множество всех центров плоских образующих E_s поверхности V^{τ}_{m}) [1]. Другими словами, вырожденная гиперполоса CH^{τ}_{m} называется нераспадающейся, если характеристика $E_{n-\tau-1}$ данной гиперполосы не распадается на две плоскости E_s и E_{n-m-1} ($E_s \cap E_{n-m-1}=0$), являющиеся соответственно плоскими образующими тангенциально вырожденных поверхностей V^{τ}_{m} и V^{τ}_{n-s-1}.

Для вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m} построено внутреннее инвариантное оснащение и дана геометрическая интерпретация некоторых геометрических объектов, характеризующих построенное внутреннее инвариантное оснащение. В общем случае найдено поле двупараметрической связки соприкасающихся гиперквадрик, внутренним инвариантным образом присоединенных к исследуемой гиперполосе CH^{τ}_{m}. Поле соприкасающихся гиперквадрик записано (в общем случае) и для распадающихся гиперполос CH^{τ}_{m}. Более подробно рассмотрены построения полей геометрических объектов, в частности квазитензоров, тензоров, относительных инвариантов в окрестностях второго и третьего порядков элемента нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}.

Работа выполнена теоретико-групповым методом Г.Ф. Лаптева [2].

В данной работе мы пользуемся терминологией и обозначениями, введенными в статье [1].

§ 1. Задание нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m} в n-мерном проективном пространстве P_n

В проективном пространстве P_n наряду с точечным подвижным репером $\{A_{\mathcal{J}}\}$ рассмотрим двойственный ему репер $\{\tau^{\varkappa}\}$, элементы которого $\tau^{\varkappa}$ являются гранями репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$. Тогда

$$(A_{\mathcal{J}}, \tau^{\varkappa}) = \delta^{\varkappa}_{\mathcal{J}}. \qquad (1.1)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений данных реперов принимают следующий вид:

$$dA_J = \omega_J^{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}, \qquad d\tau^J = -\omega_{\mathcal{K}}^J \tau^{\mathcal{K}}, \tag{1.2}$$

где формы $\omega_J^{\mathcal{K}}$ имеют проективную структуру

$$d\omega_J^{\mathcal{K}} = \omega_J^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}}, \tag{1.3}$$

$$\sum_J \omega_J^J = 0. \tag{1.4}$$

Присоединим к изучаемому образу CH_m^τ подвижной репер, полагая $A_0 = A, \tau^n = \tau$, где A – центр плоской образующей E_s, а τ – главная касательная гиперплоскость гиперполосы CH_m^τ.

Для гиперполосы CH_m^τ имеем

$$(dA_0, \tau^n) = (A_0, d\tau^n) = 0, \tag{1.5}$$

поэтому в репере нулевого порядка

$$\omega_0^n = 0. \tag{1.6}$$

Элемент (A_0, τ^n) гиперполосы CH_m^τ зависит от τ существенных параметров $\{u^\rho\}$, которые назовем главными. При изменении главных параметров $\{u^\rho\}$ точка A_0 описывает τ-мерную поверхность – поверхность центров плоских образующих E_s базисной поверхности V_m^τ гиперполосы, а семейство главных касательных гиперплоскостей τ^n огибает некоторую тангенциально вырожденную гиперповерхность V_{n-1}^τ. Плоские $(n-\tau-1)$-мерные образующие $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V_{n-1}^τ являются характеристиками вырожденной гиперполосы CH_m^τ, причем $E_s \subset E_{n-\tau-1}$.

Специализируем репер, поместив точки $\{A_\rho\}$ в касательной плоскости T_τ поверхности V_τ, точки $\{A_i\}$ – в плоскости E_s, точки $\{A_\alpha\}$ – в характеристической плоскости $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH_m^τ, а точка A_n пусть занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_0, A_i, A_\rho, A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_J\}$ пространства P_n.

В этом репере, учитывая (1.1) и (1.2), получим

$$\omega_0^i = 0, \tag{1.7}$$

$$\omega_0^\alpha = 0, \tag{1.8}$$

$$\omega_i^n = 0, \tag{1.9}$$

$$\omega_\alpha^n = 0. \tag{1.10}$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений плоского элемента (A_0, τ^n) гиперполосы CH_m^τ примут вид:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega_0^\rho A_\rho, \\ d\alpha^n &= -\omega_\rho^n \tau^\rho - \omega_n^n \tau^n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Следовательно, формы $\omega^\rho \equiv \omega_0^\rho$ определяют перемещение точки A_0 по поверхности V_τ и поэтому являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов du^ρ главных параметров – базисными формами гиперполосы CH_m^τ, отнесенной к подвижному точечному реперу $\{A_J\}$. Аналогично формы ω_ρ^n определяют перемещение гиперплоскости τ^n и, следовательно, являются базисными формами гиперполосы CH_m^τ, отнесенной к подвижному тангенциальному реперу $\{\tau^J\}$.

Уравнения (1.9) и уравнения

$$\omega_i^\alpha = 0 \tag{1.12}$$

характеризуют условие постоянства касательной плоскости T_m вдоль плоской образующей E_s базисной поверхности V_m^τ гиперполосы CH_m^τ.

Продолжая уравнения (1.6)-(1.10), с учетом этих же уравнений и леммы Картана, находим

$$\omega^n_p = a_{pq}\,\omega^q; \quad a_{pq} = a_{qp}, \quad a = \det\|a_{pq}\| \neq 0; \tag{1.13}$$

$$\omega^p_i = b^{pq}_i\,\omega^n_q = b^{pt}_i\,a_{tq}\,\omega^q = a^p_{iq}\,\omega^q, \tag{1.14}$$

$$\omega^i_p = b^i_{pq}\,\omega^q = b^i_{pt}\,a^{tq}\,\omega^n_q = a^{iq}_p\,\omega^n_q, \tag{1.15}$$

$$\omega^p_\alpha = b^{pq}_\alpha\,\omega^n_q = b^{pt}_\alpha\,a_{tq}\,\omega^q = a^p_{\alpha q}\,\omega^q, \tag{1.16}$$

$$\omega^\alpha_p = b^\alpha_{pq}\,\omega^q = b^\alpha_{pt}\,a^{tq}\,\omega^n_q = a^{\alpha q}_p\,\omega^n_q, \tag{1.17}$$

где a^{pq} элементы матрицы $\|a^{pq}\|$, обратной матрице $\|a_{pq}\|$:

$$a_{pq}\,a^{qt} = \delta^t_p, \tag{1.18}$$

а величины b_{pq}, b^{pq}_i, b^{pq}_α, b^α_{pq} симметричны по индексам p, q.

Кроме того, дифференцируя внешним образом уравнения (1.12), учитывая (1.14), (1.17) и лемму Картана, убеждаемся, что коэффициенты уравнений (1.14) и (1.17) связаны конечными соотношениями

$$a^p_{it}\,b^\alpha_{pq} = a^p_{iq}\,b^\alpha_{pt}. \tag{1.19}$$

Пфаффовы уравнения (1.6)-(1.10), (1.12), (1.14)-(1.17) и конечные соотношения (1.19) определяют m-мерную вырожденную нераспадающуюся гиперполосу CH^τ_m ранга τ проективного пространства P_n. При этом уравнения (1.6)-(1.8) задают поверхность центров V_τ плоских образующих E_s базисной поверхности V^τ_m гиперполосы CH^τ_m (поверхность V_τ - "направляющая" поверхности V^τ_m), уравнения (1.6), (1.8), (1.9), (1.12), (1.14), (1.17) и соотношения (1.19) характеризуют базисную поверхность V^τ_m гиперполосы CH^τ_m, а уравнения (1.6), (1.9), (1.10) определяют тангенциально вырожденную гиперповерхность V^τ_{n-1}, огибаемую гиперплоскостями τ^n.

Продолжая уравнения (1.13)-(1.18), находим

$$\nabla a_{pq} = -a_{pq}\,(\omega^o_o + \omega^n_n) + a_{pqt}\,\omega^t, \tag{1.20}$$

$$\nabla b^{pq}_i = b^{pq}_i\,\omega^n_n + a^{pq}\,\omega^o_i - b^{pqt}_i\,\omega^n_t, \tag{1.21}$$

$$\nabla b^i_{pq} = -b^i_{pq}\,\omega^o_o - a_{pq}\,\omega^i_n - b^\alpha_{pq}\,\omega^i_\alpha + b^i_{pqt}\,\omega^t, \tag{1.22}$$

$$\nabla b^{pq}_\alpha = b^{pq}_\alpha\,\omega^n_n + a^{pq}\,\omega^o_\alpha + b^{pq}_i\,\omega^i_\alpha - b^{pqt}_\alpha\,\omega^n_t, \tag{1.23}$$

$$\nabla b^\alpha_{pq} = -b^\alpha_{pq}\,\omega^o_o - a_{pq}\,\omega^\alpha_n + b^\alpha_{pqt}\,\omega^t, \tag{1.24}$$

$$\nabla a^{pq} = a^{pq}\,(\omega^o_o + \omega^n_n) - a^{pqt}\,\omega^n_t, \tag{1.25}$$

где величины a_{pqt}, a^{pqt}, b^{pqt}_i, b^i_{pqt}, b^{pqt}_α, b^α_{pqt} симметричны по индексам p, q, t.

Из уравнений (1.20) и (1.25) следует, что величины a_{pq} и

a^{pq} являются относительными тензорами -основные двухвалентные тензоры нераспадающейся гиперполосы CH_m^{τ}.

Системы величин $\Gamma_2 = \{a_{pq}, b_i^{pq}, b_{pq}^i, b_{\alpha}^{pq}, b_{pq}^{\alpha}\}$ и $\Gamma_3 = \{\Gamma_2, a_{pqt}, a^{pqt}, b_i^{pqt}, b_{pqt}^i, b_{\alpha}^{pqt}, b_{pqt}^{\alpha}\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядка вырожденной нераспадающейся m-мерной гиперполосы CH_m^{τ} ранга τ.

Дальнейшее продолжение системы уравнений (1.20)-(1.25) вводит геометрические объекты четвертого и более высоких порядков, определяемые гиперполосой CH_m^{τ}.

Таким образом строится последовательность фундаментальных геометрических объектов вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH_m^{τ}.

§ 2. Построение внутреннего инвариантного оснащения вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH_m^{τ}

1. Предварительно построим геометрические объекты, которые характеризуют инвариантно присоединенный к гиперполосе CH_m^{τ} репер и инвариантное оснащение гиперполосы в смысле А.П.Нордена. [4],[9].

Инвариантную нормаль второго рода гиперполосы CH_m^{τ} - $(m-1)$-мерную плоскость $E_{m-1} \equiv [A_i, A_p]$ - определим точками

$$M_p = A_p + x_p A_0, \quad M_i = A_i + x_i A_0,$$

где

$$\nabla_\delta x_p = -x_p \pi_0^0 - \pi_p^0, \tag{2.1}$$

$$\nabla_\delta x_i = -x_i \pi_0^0 - \pi_i^0. \tag{2.2}$$

Точки $\{M_p\}$ определяют инвариантную плоскость $E_{\tau-1}$, лежащую в касательной плоскости T_τ поверхности V_τ (поверхности центров плоских образующих E_s базисной поверхности V_m^{τ} гиперполосы CH_m^{τ}), а точки $\{M_i\}$ определяют инвариантную плоскость $E_{s-1} \subset E_s$.

Инвариантную нормаль первого рода гиперполосы CH_m^{τ} - $(n-m)$-мерную плоскость $E_{n-m} \equiv [A_0, A_\alpha, A_n]$ - зададим как пересечение гиперплоскостей

$$\sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n, \quad \sigma^i = \tau^i + y^i \tau^n - \rho_\alpha^i \tau^\alpha,$$

где

$$\nabla_\delta y^p = y^p \pi_n^n + \pi_n^p, \tag{2.3}$$

$$\nabla_\delta \rho_\alpha^i = -\pi_\alpha^i, \tag{2.4}$$

$$\nabla_\delta y^i = y^i \pi_n^n - \rho_\alpha^i \pi_n^\alpha + \pi_n^i. \tag{2.5}$$

Гиперплоскости σ^p определяют инвариантную плоскость $E_{n-\tau}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую плоскую образующую $E_{n-\tau-1} \equiv [A_0, A_\alpha, A_i]$ вырожденной гиперповерхности V_{n-1}^{τ} (характеристику гиперполосы CH_m^{τ}), огибаемой главными касательными гиперплоскостями τ^n гиперполосы CH_m^{τ}. Гиперплоскости σ^i задают инвариантную плоскость E_{n-s}, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую касательную плоскость T_τ поверхности V_τ.

Кроме основных элементов инвариантного оснащения гиперполосы CH_m^{τ} - ее нормалей первого и второго рода, определим еще инвариантную плоскость $E_{n-m-2} = [A_\alpha]$ точками

$$M_\alpha = A_\alpha + \rho^i_\alpha A_i + x_\alpha A_o .$$

Инвариантная плоскость E_{n-m-2} есть плоскость пересечения инвариантной нормали первого рода E_{n-m} и характеристики $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH^τ_m. Из условия инвариантности плоскости E_{n-m-2} следует, что

$$\nabla_\delta x_\alpha = -x_\alpha \pi^o_o - \rho^i_\alpha \pi^o_i - \pi^o_\alpha , \qquad (2.6)$$

где величины ρ^i_α удовлетворяют условию (2.5). Далее, выделим инвариантный пучок касательных гиперплоскостей

$$\sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha \tau^n ,$$

где

$$\nabla_\delta y^\alpha = y^\alpha \pi^n_n + \pi^\alpha_n . \qquad (2.7)$$

Наконец, рассмотрим точку

$$M_n = A_n - y^\alpha A_\alpha - (y^i + \rho^i_\alpha y^\alpha) A_i - y^p A_p + x A_o$$

и гиперплоскость

$$\sigma^o = \tau^o - x_p \tau^p - x_i \tau^i - (x_\alpha - \rho^i_\alpha x_i)\tau^\alpha + y \tau^n .$$

Точка M_n принадлежит гиперплоскостям $\sigma^p, \sigma^i, \sigma^\alpha$ и определяет вместе с точками $M_o \equiv A_o$ и M_α инвариантную нормаль первого рода гиперполосы CH^τ_m. Гиперплоскость σ^o содержит точки M_p, M_i, M_α и определяет вместе с гиперплоскостями $\tau^n \equiv \sigma^n$ и σ^α нормаль второго рода гиперполосы CH^τ_m.

Условие инцидентности точки M_n и гиперплоскости σ_o задается соотношением

$$(M_n, \sigma^o) = 0,$$

откуда

$$x + y + x_p y^p + x_i y^i + x_\alpha y^\alpha = 0 . \qquad (2.8)$$

Условия инвариантности точки M_n и гиперплоскости σ^o имеют соответственно вид:

$$\delta x = x(\pi^n_n - \pi^o_o) + y^p \pi^o_p + (y^i + \rho^i_\alpha y^\alpha)\pi^o_i + y^\alpha \pi^o_\alpha - \pi^o_n , \qquad (2.9)$$

$$\delta y = y(\pi^n_n - \pi^o_o) - x_i \pi^i_n - x_p \pi^p_n - (x_\alpha - \rho^i_\alpha x_i)\pi^\alpha_n + \pi^o_n . \qquad (2.10)$$

Уравнения (2.1)-(2.7),(2.9),(2.10) показывают, что величины

$$x_p,\ x_i,\ y^p,\ y^\alpha,\ \rho^i_\alpha,\ \{y^i, \rho^i_\alpha\},\ \{x_\alpha, \rho^i_\alpha\},$$
$$\{x, y^p, y^i, \rho^i_\alpha, y^\alpha\},\ \{y, x_i, x_p, x_\alpha, \rho^i_\alpha\} \qquad (2.11)$$

образуют геометрические объекты, которые назовем оснащающими объектами вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m.

Эти оснащающие объекты определяют инвариантные реперы $\{M_\gamma\}$ и $\{\sigma^\varkappa\}$ (соответственно точечный и тангенциальный реперы), присоединенные к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m. Элементы этих реперов следующим образом выражаются через элементы исходных реперов:

$$M_o = A_o ,$$
$$M_p = A_p + x_p A_o , \qquad (2.12)$$

$$M_i = A_i + x_i A_o,$$

$$M_\alpha = A_\alpha + \rho^i_\alpha A_i + x_\alpha A_o, \tag{2.12}$$

$$M_n = A_n - y^\alpha A_\alpha - (y^i + \rho^i_\alpha y^\alpha) A_i - y^p A_p - x A_o$$

и

$$\begin{aligned} \sigma^o &= \tau^o - x_p \tau^p - x_i \tau^i - (x_\alpha - \rho^i_\alpha x_i)\tau^\alpha + y\tau^n, \\ \sigma^p &= \tau^p + y^p \tau^n, \\ \sigma^i &= \tau^i - \rho^i_\alpha \tau^\alpha + y^i \tau^n, \\ \sigma^\alpha &= \tau^\alpha + y^\alpha \tau^n, \\ \sigma^n &= \tau^n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.Инвариантное оснащение (репер) вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m называется внутренним инвариантным оснащением (репером) К-го порядка, если оснащающие объекты (2.11) гиперполосы CH^τ_m являются функциями компонент фундаментального дифференциально-геометрического объекта К-го порядка рассматриваемой гиперполосы CH^τ_m. Докажем, что для фундаментального дифференциально геометрического объекта четвертого порядка гиперполосы CH^τ_m существуют алгебраические охваты, структура которых такая же, как и структура дифференциально-геометрических оснащающих объектов данной гиперполосы CH^τ_m.

В окрестности второго порядка элемента гиперполосы CH^τ_m построим величины

$$\Lambda_i = \frac{1}{\tau} a_{pq} b^{pq}_i, \tag{2.14}$$ $$\Lambda^\alpha = \frac{1}{\tau} a^{pq} b^\alpha_{pq}, \tag{2.15}$$

$$\bar\Lambda^i = \frac{1}{\tau} a^{pq} b^i_{pq}, \tag{2.16}$$ $$\bar\Lambda_\alpha = \frac{1}{\tau} a_{pq} b^{pq}_\alpha. \tag{2.17}$$

Имеем

$$\nabla_\delta \Lambda_i = -\Lambda_i \pi^o_o + \pi^o_i, \tag{2.18}$$

$$\nabla_\delta \Lambda^\alpha = \Lambda^\alpha \pi^n_n - \pi^\alpha_n, \tag{2.19}$$

$$\nabla_\delta \bar\Lambda^i = \bar\Lambda^i \pi^n_n - \pi^i_n - \Lambda^\alpha \pi^i_\alpha, \tag{2.20}$$

$$\nabla_\delta \bar\Lambda_\alpha = -\bar\Lambda_\alpha \pi^o_o + \pi^o_\alpha + \Lambda_i \pi^i_\alpha. \tag{2.21}$$

Сравнивая уравнения (2.18),(2.19) соответственно с уравнениями (2.2),(2.7), находим, что в окрестности второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m квазитензоры Λ_i и Λ^α определяют внутренние инвариантные плоскости

$$E_{s-1} \equiv [M_i] = [A_i - \Lambda_i A_o] \text{ и } E_{m+1} \equiv [\sigma^\alpha] = [\tau^\alpha - \Lambda^\alpha \tau^n].$$

Рассмотрим далее систему величин

$$C^{pq}_i = b^{pq}_i - \Lambda_i a^{pq}, \tag{2.22}$$ $$C^\alpha_{pq} = b^\alpha_{pq} - \Lambda^\alpha a_{pq}, \tag{2.23}$$

$$C^i_{pq} = b^i_{pq} - \bar\Lambda^i a_{pq}, \tag{2.24}$$ $$C^{pq}_\alpha = b^{pq}_\alpha - \bar\Lambda_\alpha a^{pq}, \tag{2.25}$$

где

$$\nabla_\delta C^{pq}_i = C^{pq}_i \pi^n_n, \tag{2.26}$$

$$\nabla_\delta C^\alpha_{pq} = -C^\alpha_{pq} \pi^o_o, \tag{2.27}$$

$$\nabla_\delta C^i_{pq} = -C^i_{pq} \pi^o_o - C^\alpha_{pq} \pi^i_\alpha, \tag{2.28}$$

$$\nabla_\delta C^{pq}_\alpha = C^{pq}_\alpha \pi^n_n + C^{pq}_i \pi^i_\alpha . \qquad (2.29)$$

Из (2.26),(2.27) следует, что величины C^{pq}_i и C^α_{pq} являются относительными тензорами. Кроме того, выполняются следующие соотношения аполярности:

$$C^i_{pq}\, a^{pq} = 0, \qquad C^\alpha_{pq}\, a^{pq} = 0, \qquad (2.30)$$

$$C^{pq}_i\, a_{pq} = 0, \qquad C^{pq}_\alpha\, a_{pq} = 0. \qquad (2.31)$$

Дальнейшее построение проводим для нераспадающихся гиперполос CH^τ_m, которые допускают отличный от нуля инвариант $J = J(C^{pq}_i, C^\alpha_{pq})$. В общем случае, когда соприкасающаяся плоскость второго порядка заполняет все пространство, можно показать [5], что к гиперполосе CH^τ_m присоединяются объекты второго порядка $\tilde{C}^i_{pq}$ и $\tilde{C}^{pq}_\alpha$ — обращенные тензоры соответственно тензорам C^{pq}_i и C^α_{pq}:

$$\tilde{C}^{pq}_\alpha C^\beta_{pq} = \tau\delta^\beta_\alpha, \quad \tilde{C}^{pq}_\alpha C^\alpha_{tq} = (m-\tau-1)\delta^p_t, \quad \tilde{C}^{pq}_\alpha C^\alpha_{pq} = \tau(n-m-1), \qquad (2.32)$$

$$\tilde{C}^i_{pq} C^{pt}_i = (m-\tau)\delta^t_q, \quad \tilde{C}^j_{pq} C^{pt}_i = \tau\delta^j_i. \quad \tilde{C}^i_{pq} C^{pq}_i = \tau(m-\tau). \qquad (2.33)$$

Имеем

$$\nabla \tilde{C}^{pq}_\alpha = \tilde{C}^{pq}_\alpha \omega^0_0 - \tilde{C}^{pqt}_\alpha \omega^n_t, \qquad (2.34)$$

$$\nabla \tilde{C}^i_{pq} = -\tilde{C}^i_{pq}\omega^n_n + C^i_{pqt}\omega^t. \qquad (2.35)$$

Теперь последовательно составим величины

$$t^i_\alpha = \frac{1}{\tau} C^i_{pq}\tilde{C}^{pq}_\alpha, \ (2.36); \qquad t_\alpha = \Lambda_i t^i_\alpha, \qquad (2.36)$$

$$t^i = \Lambda^\alpha t^i_\alpha, \ (2.38), \qquad \Lambda^i = \bar{\Lambda}^i - t^i, \qquad (2.39)$$

$$\Lambda_\alpha = \bar{\Lambda}_\alpha + t_\alpha. \qquad (2.40)$$

где

$$\nabla_\delta t^i_\alpha = -\pi^i_\alpha, \qquad (2.41)$$

$$\nabla_\delta t_\alpha = -t_\alpha\pi^0_0 + t^i_\alpha\pi^0_i - \Lambda_i\pi^i_\alpha, \qquad (2.42)$$

$$\nabla_\delta t^i = t^i\pi^n_n - t^i_\alpha\pi^\alpha_n - \Lambda^\alpha\pi^i_\alpha, \qquad (2.43)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^i = \Lambda^i\pi^n_n + t^i_\alpha\pi^\alpha_n - \pi^i_n, \qquad (2.44)$$

$$\nabla_\delta \Lambda_\alpha = -\Lambda_\alpha\pi^0_0 + t^i_\alpha\pi^0_i + \pi^0_\alpha. \qquad (2.45)$$

Сравнивая уравнения (2.41),(2.44),(2.45) с уравнениями (2.4)-(2.6), приходим к выводу, что квазитензоры $\{t^i_\alpha, \Lambda^i\}$ и $\{t^i_\alpha, \Lambda_\alpha\}$ определяют в окрестности второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m соответственно внутренние инвариантные плоскости $E_{n-m-2} \equiv [M_\alpha] = [A_\alpha - \Lambda_\alpha A_0 + t^i_\alpha A_i]$

и $E_{n-s} = [\sigma^i] = [\tau^i - \Lambda^i\tau^n - t^i_\alpha\tau^\alpha]$.

Заметим, что внутренние оснащающие плоскости $E_{s-1} = [M_i]$ и $E_{n-s} = [\sigma^i]$, а также соответственно внутренние оснащающие плоскости $E_{m+1} = [\sigma^\alpha]$ и $E_{n-m-2} = [M_\alpha]$, определяемые в окрестности второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m, есть двойственные друг другу образы.

3. Построим с помощью компонент фундаментального геометрического объекта третьего порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m охваты, структура которых такая же, как и структура оснащающих объектов x_p и x^p данной ги-

перполосы CH^{τ}_{m}.

Составим величины

$$d_p = \frac{1}{\tau+2} a_{pqt} a^{qt}, \quad (2.46) \qquad d^p = \frac{1}{\tau+2} a^{pqt} a_{qt} . \qquad (2.47)$$

Они позволяют построить относительные тензоры

$$\ell_{pqt} = a_{pqt} - a_{(pq} d_{t)}, \qquad (2.48)$$

$$\ell^{pqt} = a^{pqt} - a^{(pq} d^{t)}, \qquad (2.49)$$

связанные равенством

$$\ell^{pqt} = a^{sp} a^{fq} a^{vt} \ell_{sfv} \qquad (2.50)$$

и удовлетворяющие условиям аполярности

$$\ell_{pqt} a^{qt} = 0, \quad \ell^{pqt} a_{qt} = 0. \qquad (2.51)$$

Тензор ℓ_{pqt} является тензором Дарбу [2] базисной поверхности V^{τ}_{m}, а тензор ℓ^{pqt} – тензором Дарбу гиперповерхности V^{τ}_{n-1}, огибающей главные касательные гиперплоскости гиперполосы CH^{τ}_{m}. Компоненты тензора Дарбу ℓ_{pqt} и ℓ^{pqt} удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \ell_{pqt} = -\ell_{pqt} (2\omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) + \ell_{pqts} \omega^{s}, \qquad (2.52)$$

$$\nabla \ell^{pqt} = \ell^{pqt} (\omega^{0}_{0} + 2\omega^{n}_{n}) - \ell^{pqts} \omega^{n}_{s} . \qquad (2.53)$$

С помощью тензоров Дарбу составим относительный инвариант

$$\ell_0 = \ell_{pqt} \ell^{pqt} \qquad (2.54)$$

Дальнейшие построение проводится в предположении, что $\ell_0 \neq 0$. В общем случае можно считать, что $\ell_0 \neq 0$ при $\ell_{pqt} \neq 0$ (см., например, при начальных условиях (4.24)-(4.27)).

Имеем

$$d \ln \ell_0 = \omega^{n}_{n} - \omega^{0}_{0} + \ell_p \omega^p \qquad (2.55)$$

или

$$d \ln \ell_0 = \omega^{n}_{n} - \omega^{0}_{0} - \ell^p \omega^{n}_{p}, \quad \text{где} \quad \ell^p = a^{pq} \ell_q . \qquad (2.56)$$

Наконец, определим оснащающие объекты x_p и y^p нужного строения:

$$\Lambda_p = -\frac{1}{2}(d_p + \ell_p), \qquad (2.57)$$

$$\Lambda^p = -\frac{1}{2}(d^p + \ell^p), \qquad (2.58)$$

где

$$\nabla \Lambda_p = -\Lambda_p \omega^{0}_{0} + \omega^{0}_{p} + \bar{\Lambda}^{q}_{p} \omega^{n}_{q}, \qquad (2.59)$$

$$\nabla \Lambda^p = \Lambda^p \omega^{n}_{n} - \omega^{p}_{n} - \tilde{\Lambda}^{p}_{q} . \qquad (2.60)$$

Действительно, уравнения (2.1), (2.3) удовлетворяются при $x_p = -\Lambda_p$, $y^p = -\Lambda^p$. Таким образом, приходим к выводу, что квазитензоры Λ_p и Λ^p определяют в окрестности третьего порядка данной гиперполосы CH^{τ}_{m} внутренние оснащающие двойственные друг другу плоскости

$$E_{\tau-1} = [M_p] = [A_p - \Lambda_p A_0], \quad E_{n-\tau} = [\sigma^p] = [\tau^p - \Lambda^p \tau^n].$$

4. Перейдем к построению геометрических объектов, определяющих инвариантную точку M_n и гиперплоскость, внутренним образом присоединенных к нераспадающейся гиперполосе CH^{τ}_m. Уравнения (2.8)-(2.10), которым удовлетворяют эти объекты, теперь принимают вид:

$$x+y+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\Lambda^i+\Lambda_\alpha\Lambda^\alpha=0, \qquad (2.61)$$

$$\delta x=x(\pi^n_n-\pi^0_0)-\Lambda^p\pi^0_p-(\Lambda^i+t^i_\alpha\Lambda^\alpha)\pi^0_i-\Lambda^\alpha\pi^0_\alpha-\pi^0_n, \qquad (2.62)$$

$$\delta y=y(\pi^n_n-\pi^0_0)+\Lambda_p\pi^p_n+\Lambda_i\pi^i_n+(\Lambda_\alpha-t^i_\alpha\Lambda_i)\pi^\alpha_n+\pi^0_n. \qquad (2.63)$$

Дальнейшее построение в окрестности четвертого порядка данной гиперполосы CH^{τ}_m проводим аналогично работам [6], [1].

Вводим в рассмотрение величины

$$\tilde{x}=\Lambda+\bar{\Lambda}+\bar{\bar{\Lambda}}, \qquad \tilde{y}=\Lambda+\bar{\Lambda}+\bar{\bar{\Lambda}}, \qquad (2.64)$$

где

$$\Lambda=-\Lambda_i\Lambda^i-\Lambda_\alpha\Lambda^\alpha, \quad \tilde{\Lambda}=\frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}^p_p, \quad \bar{\Lambda}=\frac{1}{\tau}\bar{\Lambda}^p_p,$$

$$\tilde{\tilde{\Lambda}}=\frac{1}{\tau}a_{pq}\Lambda^p\Lambda^q, \quad \bar{\bar{\Lambda}}=\frac{1}{\tau}a^{pq}\Lambda_p\Lambda_q.$$

Легко проверить, что величины $\tilde{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяют уравнениям (2.62) и (2.63) и, следовательно, определенные с их помощью точка

$$\tilde{M}_n=A_n+\Lambda^\alpha A_\alpha+(\Lambda^i+t^i_\alpha\Lambda^\alpha)A_i+\Lambda^pA_p+\tilde{x}A_0$$

и гиперплоскость

$$\bar{\sigma}^0=\tau^0+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+(\Lambda_\alpha-t^i_\alpha\Lambda_i)\tau^\alpha+\bar{y}\tau^n$$

внутренним образом присоединены к нераспадающейся гиперполосе CH^{τ}_m в ее окрестности четвертого порядка. При этом оказывается, условие инцидентности (2.61) точки $\tilde{M}_n$ и гиперплоскости $\bar{\sigma}^0$ не выполняется. Однако можно выделить в пучке гиперплоскостей $[\bar{\sigma}^0, \sigma^n]$ внутреннюю инвариантную гиперплоскость

$$\tilde{\sigma}^0=\tau^0+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+(\Lambda_\alpha-t^i_\alpha\Lambda_i)\tau^\alpha-(\tilde{x}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\bar{\Lambda}_\alpha\Lambda^\alpha)\tau^n,$$

инцидентную точке $\tilde{M}_n$, а на прямой $[M_0, \tilde{M}_n]$ - инвариантную точку

$$\bar{M}_n=A_n+\Lambda^pA_p+(\Lambda^i+t^i_\alpha\Lambda^\alpha)A_i+\Lambda^\alpha A_\alpha-(\bar{y}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\Lambda^\alpha\bar{\Lambda}_\alpha)A_0,$$

внутренним образом присоединенную к гиперполосе CH^{τ}_m и инцидентную гиперплоскости $\bar{\sigma}^0$. Более того, нетрудно показать, что величины

$$\bar{\Lambda}^0=\frac{\alpha\tilde{x}+\beta\bar{x}}{\alpha+\beta}; \qquad \bar{\Lambda}_n=\frac{\alpha\tilde{y}+\beta\bar{y}}{\alpha+\beta}, \qquad (2.65)$$

где

$$\bar{x}=-(\bar{y}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\Lambda^\alpha\bar{\Lambda}_\alpha); \quad \tilde{y}=-(\tilde{x}+\Lambda_p\Lambda^p+\Lambda_i\bar{\Lambda}^i+\bar{\Lambda}_\alpha\Lambda^\alpha),$$

а α и β произвольные действительные числа, удовлетворяют уравнениям (2.62) и (2.63). Следовательно, точка

$$M_n=A_n+\Lambda^pA_p+\bar{\Lambda}^iA_i+\Lambda^\alpha A_\alpha+\bar{\Lambda}^0A_0 \qquad (2.66)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0=\tau^0+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+\bar{\Lambda}_\alpha\tau^\alpha+\bar{\Lambda}_n\tau^n \qquad (2.67)$$

внутренним инвариантным образом присоединены к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m в ее окрестности четвертого порядка, двойственны друг другу и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (2.61).

Таким образом, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы четвертого порядка, присоединенные внутренним образом к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&M_0=A_0,\\
&M_p=A_p-\Lambda_pA_0,\\
&M_i=A_i-\Lambda_iA_0, \qquad\qquad (2.68)\\
&M_\alpha=A_\alpha+t^i_\alpha A_i-\Lambda_\alpha A_0,\\
&M_n=A_n+\Lambda^\alpha A_\alpha+\bar{\Lambda}^i A_i+\Lambda^p A_p+\bar{\Lambda}^0 A_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma^0=\tau^0+\Lambda_p\tau^p+\Lambda_i\tau^i+\bar{\Lambda}_\alpha\tau^\alpha+\bar{\Lambda}_n\tau^n,\\
&\sigma^p=\tau^p-\Lambda^p\tau^n,\\
&\sigma^i=\tau^i-t^i_\alpha\tau^\alpha-\Lambda^i\tau^n, \qquad\qquad (2.69)\\
&\sigma^\alpha=\tau^\alpha-\Lambda^\alpha\tau^n,\\
&\sigma^n=\tau^n.
\end{aligned}$$

§ 3. Фокальные образы, связанные с нераспадающейся гиперполосой CH^τ_m

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл некоторых элементов внутреннего оснащения, построенного во втором параграфе, рассмотрим фокальные образы, связанные с нераспадающейся гиперполосой CH^τ_m.

Выясним геометрический смысл оснащающей плоскости $E_{S-1}=[M_i]$, принадлежащей плоской образующей E_s базисной поверхности V^τ_m.

Рассмотрим точку

$$X=x^iM_i+x^0A_0, \qquad (3.1)$$

которая принадлежит плоской образующей $E_S=[A_0,A_i]$ базисной поверхности V^τ_m.

Определение. Точку X назовем фокальной [7], если она принадлежит, кроме E_S, еще некоторой смежной образующей E'_S. Геометрическое место фокальных точек X назовем фокальной поверхностью $\mathcal{F}_\tau$ образующей E_S [7].

Из условия фокальности точки X в силу уравнений (1.2), (1.4) следует, что фокальная поверхность $\mathcal{F}_\tau$

$$\det\|x^0\delta^p_q+x^i a^p_{iq}\|=0 \ \ (a); \quad x^p=x^\alpha=x^n=0 \ \ (б) \qquad (3.2)$$

является алгебраической поверхность порядка τ [7]. Далее рассуждая так же, как в работе [1], приходим к выводу, что внутренняя оснащающая плоскость $E_{S-1}=[M_i]$ есть гармоническая поляра [10] точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$ (3.2).

и гиперплоскость

$$\sigma^{o}=\tau^{o}+\Lambda_{p}\tau^{p}+\Lambda_{i}\tau^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha}+\bar{\Lambda}_{n}\tau^{n} \qquad (2.67)$$

внутренним инвариантным образом присоединены к нераспадающейся гиперполосе CH^{τ}_{m} в ее окрестности четвертого порядка, двойственны друг другу и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (2.61).

Таким образом, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы четвертого порядка, присоединенные внутренним образом к нераспадающейся гиперполосе CH^{τ}_{m} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &M_{o}=A_{o},\\ &M_{p}=A_{p}-\Lambda_{p}A_{o},\\ &M_{i}=A_{i}-\Lambda_{i}A_{o}, \qquad (2.68)\\ &M_{\alpha}=A_{\alpha}+t^{i}_{\alpha}A_{i}-\Lambda_{\alpha}A_{o},\\ &M_{n}=A_{n}+\Lambda^{\alpha}A_{\alpha}+\bar{\Lambda}^{i}A_{i}+\Lambda^{p}A_{p}+\bar{\Lambda}^{o}A_{o}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sigma^{o}=\tau^{o}+\Lambda_{p}\tau^{p}+\Lambda_{i}\tau^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha}+\bar{\Lambda}_{n}\tau^{n},\\ &\sigma^{p}=\tau^{p}-\Lambda^{p}\tau^{n},\\ &\sigma^{i}=\tau^{i}-t^{i}_{\alpha}\tau^{\alpha}-\Lambda^{i}\tau^{n}, \qquad (2.69)\\ &\sigma^{\alpha}=\tau^{\alpha}-\Lambda^{\alpha}\tau^{n},\\ &\sigma^{n}=\tau^{n}. \end{aligned}$$

§ 3. Фокальные образы, связанные с нераспадающейся гиперполосой CH^{τ}_{m}

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл некоторых элементов внутреннего оснащения, построенного во втором параграфе, рассмотрим фокальные образы, связанные с нераспадающейся гиперполосой CH^{τ}_{m}.

Выясним геометрический смысл оснащающей плоскости $E_{S-1}=[M_{i}]$, принадлежащей плоской образующей E_{S} базисной поверхности V^{τ}_{m}.

Рассмотрим точку

$$X=x^{i}M_{i}+x^{o}A_{o}, \qquad (3.1)$$

которая принадлежит плоской образующей $E_{S}=[A_{o},A_{i}]$ базисной поверхности V^{τ}_{m}.

О п р е д е л е н и е. Точку X назовем фокальной [7], если она принадлежит, кроме E_{S}, еще некоторой смежной образующей E'_{S}. Геометрическое место фокальных точек X назовем фокальной поверхностью $\mathcal{F}_{\tau}$ образующей E_{S}[7].

Из условия фокальности точки X в силу уравнений (1.2), (1.4) следует, что фокальная поверхность $\mathcal{F}_{\tau}$

$$\det\|x^{o}\delta^{p}_{q}+x^{i}a^{p}_{iq}\|=0 \ \ (a); \qquad x^{p}=x^{\alpha}=x^{n}=0 \ \ (\delta) \qquad (3.2)$$

является алгебраической поверхность порядка τ [7]. Далее рассуждая так же, как в работе [1], приходим к выводу, что внутренняя оснащающая плоскость $E_{S-1}=[M_{i}]$ есть гармоническая поляра [10] точки A_{o} относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_{\tau}$ (3.2).

Чтобы определить геометрическую интерпретацию внутренней оснащающей плоскости $E_{n-s}=[\sigma^i]$-двойственного образа плоскости E_{s-1} —рассмотрим инвариантный пучок гиперплоскостей

$$\eta = y_i(\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + y_n \tau^n, \qquad (3.3)$$

осью которого является касательная плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1} = [\tau^n, \tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha]$ поверхности $\overset{*}{V}{}^\tau_{n-s-1}$, ассоциированной с гиперповерхностью V^τ_{n-1}, огибающей главные касательные. гиперплоскости гиперполосы CH^τ_m.

Определение 2. Гиперплоскость η называется фокальной гиперплоскостью [7] плоскости $\overset{*}{E}_{n-s-1}$, если, кроме плоскости $\overset{*}{E}_{n-s-1}$, она проходит также через некоторую смежную касательную плоскость $\overset{*}{E}{}'_{n-s-1}$ поверхности $\overset{*}{V}_{n-s-1}$. Геометрическое место фокальных плоскостей η называется фокальным конусом Φ_τ касательной плоскости $\overset{*}{E}_{n-s-1}$ поверхности $\overset{*}{V}{}^\tau_{n-s-1}$.

Из условия фокальности гиперплоскости в силу уравнений (1.2)(1.15),(1.17) следует, что фокальный конус Φ_τ представляет собой алгебраическую поверхность класса τ [7]:

$$\det\| y_n \delta^t_p - y_i(a^{it}_p - t^i_\alpha a^{\alpha t}_p)\| = 0 \ (a); \quad y_p = y_\alpha = y_o = 0 \ (\delta). \quad (3.4)$$

Перепишем уравнение (3.4а) в виде

$$\sum_{s=0}^{\tau} \mathcal{D}_s (y_n)^{\tau-s} = 0, \qquad (3.5)$$

где $\mathcal{D}_s$ -главные миноры порядка S матрицы определителя (3.4а), причем

$$\mathcal{D}_o = 1, \quad \mathcal{D}_1 = \tau y_i \Lambda^i, \quad \mathcal{D}_\tau = \det\| y_i(a^{it}_p - t^i_\alpha a^{\alpha t}_p)\|. \quad (3.6)$$

Обозначим корни уравнения (3.5) через $y^{(p)}_n$. По обобщенной теореме Виетта имеем

$$-y_i\Lambda^i = \frac{1}{\tau}\sum y^{(p)}_n. \qquad (3.7)$$

Гиперплоскости $\eta^{(p)}$, соответствующие характеристическим корням $y^{(p)}_n$ уравнения (3.5), т.е. гиперплоскости вида

$$\eta^{(p)} = \tilde{y}_i(\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + y^{(p)}_n \tau^n,$$

будем называть характеристическими гиперплоскостями пучка

$$\eta = \tilde{y}_i(\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + y_n \tau^n, \qquad (3.8)$$

где y_n -переменная величина, а $\{\tilde{y}_i\}$ -фиксированные величины.

Определение 3. Гармонической полярой [10] гиперплоскости $\tau'^n = \sigma^n$ относительно характеристических гиперплоскостей $\eta^{(p)}$ пучка (3.8), осью которого является $(n-s-1)$-мерная плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1}$, или (что то же) гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ назовем гиперплоскость

$$\bar{\eta} = \tilde{y}_i(\tau^i - t^i_\alpha \tau^\alpha) + \bar{y}_n \tau^n, \qquad (3.9)$$

где $\bar{y}_n = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau} y^{(p)}_n$.

Учитывая (3.7),(3.9), получаем

$$\overline{\eta}=\widetilde{y}_i\,(\tau^i-t^i_\alpha\tau^\alpha-\Lambda^i\tau^n)=\widetilde{y}_i\,\sigma^i, \qquad (3.10)$$

т.е. гиперплоскость $\overline{\eta}$ проходит через инвариантную плоскость $E_{n-s}=[\sigma^i]$.

Если параметры $\{\widetilde{y}_i\}$ в уравнении (3.10) меняются произвольным образом, то гиперплоскость $\overline{\eta}$ описывает пучок, осью которого является $(n-s)$-мерная плоскость E_{n-s} – гармоническая поляра гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ.

Итак, приходим к следующим результатам.

Т е о р е м а 1. Внутренняя оснащающая плоскость E_{s-1}, принадлежащая плоской образующей E_s поверхности V^τ_m, является гармонической полярой [10] точки A_o относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$, принадлежащей плоской образующей E_s нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m.

Внутренняя оснащающая плоскость $E_{n-s}=[\sigma^i]$, проходящая через касательную плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1}$ поверхности $\overset{*}{V}{}^\tau_{n-s-1}\subset V^\tau_{n-1}$, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ (3.4), вершиной которого является плоскость $\overset{*}{E}_{n-s-1}$.

Аналогично доказывается теорема 2.

Т е о р е м а 2. Инвариантная плоскость $\Pi_{n-\tau-2}=[M_i M_\alpha]$, внутренним образом присоединенная к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m и принадлежащая характеристической плоскости $E_{n-\tau-1}$ данной гиперполосы CH^τ_m, является гармонической полярой точки A_o относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det\left\|(a^p_{\alpha q}+t^i_\alpha a^p_{iq})x^\alpha+a^p_{iq}x^i+\delta^p_q x^o\right\|=0;\quad x^p=x^n=0, \qquad (3.11)$$

которая принадлежит образующей $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^τ_{n-1} (характеристике гиперполосы).

Инвариантная плоскость $E_{\tau+1}=[\sigma^i,\sigma^\alpha]$, внутренним образом присоединенная к нераспадающейся гиперполосе CH^τ_m и проходящая через касательную плоскость T_τ поверхности V_τ, является гармонической полярой гиперплоскости относительно фокального конуса $\mathfrak{F}_\tau$:

$$\det\left\|y_n\delta^q_p+a^{\alpha q}_p y_\alpha+(a^{iq}_p-a^{\alpha q}_p t^i_\alpha)y_i\right\|=0;\quad y_p=y_o=0, \qquad (3.12)$$

вершиной которого является касательная плоскость T_τ поверхности V_τ.

§ 4. О полях геометрических объектов нераспадающихся гиперполос CH^τ_m

1. Окрестность второго порядка.

В §2 построена система величин (2.14)-(2.17), (2.22)-(2.25), (2.32), (2.33), (2.36)-(2.40), охватываемая фундаментальным объектом второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH^τ_m. Продолжим построение полей геометрических объектов, определяемых в окрестности второго порядка исследуемой гиперполосы CH^τ_m. Прежде всего составим с помощью компонент геометрических объектов $\{C^i_{pq}, C^\alpha_{pq}\}$; $\{C^{pq}_\alpha, C^{pq}_i\}$ и двухвалентных основных тензоров a_{pq} и a^{pq} следующие величины:

$$\ell_{iq}^p = C_i^{ps} a_{sq}, \quad (4.1) \qquad \ell_p^{\alpha q} = C_{ps}^{\alpha} a^{sq}, \quad (4.2)$$

$$\ell_{\alpha q}^p = C_\alpha^{ps} a_{sq}, \quad (4.3) \qquad \ell_p^{iq} = C_{ps}^{i} a^{sq}, \quad (4.4)$$

$$\ell_i^j = \frac{1}{\tau} \ell_{iq}^p \ell_p^{jq} = \frac{1}{\tau} C_i^{pq} C_{pq}^j, \quad (4.5)$$

$$\ell_i^\alpha = \frac{1}{\tau} \ell_{iq}^p \ell_p^{\alpha q} = \frac{1}{\tau} C_i^{ps} C_{ps}^\alpha, \quad (4.6)$$

$$\ell_\alpha^\beta = \frac{1}{\tau} \ell_{\alpha q}^p \ell_p^{\beta q} = \frac{1}{\tau} C_\alpha^{ps} C_{ps}^\beta, \quad (4.7)$$

$$\ell_{ij} = \ell_{iq}^p \ell_{jp}^q, \quad (4.8)$$

$$\ell_{i\alpha} = \ell_{iq}^p \ell_{\alpha p}^q, \quad (4.9)$$

$$\ell^{\alpha i} = \ell_p^{\alpha q} \ell_q^{ip}, \quad (4.10)$$

$$\ell^{\alpha\beta} = \ell_p^{\alpha q} \ell_q^{\beta p}, \quad (4.11)$$

удовлетворяющие соответственно дифференциальным уравнениям

$$\nabla \ell_{iq}^p = -\ell_{iq}^p \omega_0^0 - \ell_{iq}^{ps} \omega_s^n, \quad (4.12)$$

$$\nabla \ell_p^{\alpha q} = \ell_p^{\alpha q} \omega_n^n + \ell_{ps}^{\alpha q} \omega^s, \quad (4.13)$$

$$\nabla \ell_{\alpha q}^p = -\ell_{\alpha q}^p \omega_0^0 + \ell_{iq}^p \omega_\alpha^i - \ell_{\alpha q}^{ps} \omega_s^n, \quad (4.14)$$

$$\nabla \ell_p^{iq} = \ell_p^{iq} \omega_n^n - \ell_p^{\alpha q} \omega_\alpha^i + \ell_{ps}^{iq} \omega^s, \quad (4.15)$$

$$\nabla \ell_i^j = \ell_i^j (\omega_n^n - \omega_0^0) - \ell_i^\alpha \omega_\alpha^j + \ell_{is}^j \omega^s, \quad (4.16)$$

$$\nabla \ell_i^\alpha = \ell_i^\alpha (\omega_n^n - \omega_0^0) + \ell_{is}^\alpha \omega^s, \quad (4.17)$$

$$\nabla \ell_\alpha^\beta = \ell_\alpha^\beta (\omega_n^n - \omega_0^0) + \ell_i^\beta \omega_\alpha^i + \ell_{\alpha s}^\beta \omega^s, \quad (4.18)$$

$$\nabla \ell_{ij} = -2 \ell_{ij} \omega_0^0 + \ell_{ijs} \omega^s, \quad (4.19)$$

$$\nabla \ell_{i\alpha} = -2 \ell_{i\alpha} \omega_0^0 + \ell_{ij} \omega_\alpha^j + \ell_{i\alpha s} \omega^s, \quad (4.20)$$

$$\nabla \ell^{\alpha i} = 2 \ell^{\alpha i} \omega_n^n - \ell^{\alpha\beta} \omega_\beta^i + \ell_s^{\alpha i} \omega^s, \quad (4.21^*)$$

$$\nabla \ell^{\alpha\beta} = 2 \ell^{\alpha\beta} \omega_n^n + \ell_s^{\alpha\beta} \omega^s \quad (4.21)$$

Таким образом, найдены следующие геометрические объекты второго порядка нераспадающейся гиперполосы CH_m^τ :

$$\{\ell_{iq}^p, \ell_{\alpha q}^p\}, \quad \{\ell_p^{iq}, \ell_p^{\alpha q}\}, \quad \{\ell_i^j, \ell_i^\alpha\},$$
$$(4.22)$$
$$\{\ell_\alpha^\alpha, \ell_i^\beta\}, \quad \{\ell_{ij}, \ell_{i\alpha}\}, \quad \{\ell^{\alpha i}, \ell^{\alpha\beta}\}.$$

Подобъекты $\ell_{iq}^p, \ell_p^{\alpha q}, \ell_i^\alpha, \ell_{i\alpha}, \ell^{\alpha\beta}$ соответствующих геометрических объектов (4.22) -относительные тензоры второго порядка данной гиперполосы CH_m^τ.

Построим еще один относительный тензор второго порядка Q_j^i :

$$\bar{\ell}_j^i = t_\alpha^i \ell_j^\alpha, \quad \nabla_S \bar{\ell}_j^i = \bar{\ell}_j^i (\pi_n^n - \pi_0^0) - \pi_\alpha^i \ell_j^\alpha,$$
$$(4.23)$$
$$Q_j^i = \bar{\ell}_j^i - \ell_j^i, \quad \nabla Q_j^i = Q_j^i (\omega_n^n - \omega_0^0) + Q_{js}^i \omega^s.$$

Зададим компонентам фундаментального объекта второго порядка Γ_2 нераспадающейся гиперполосы CH_m^τ следующие начальные значения [8]:

$$a_{pq} = \begin{cases} 2-\tau, & p=q; \\ 1, & p \neq q, \end{cases} \qquad \text{откуда} \quad a^{pq} = \begin{cases} 0, & i=j; \\ \frac{1}{\tau-1}, & i \neq j; \end{cases} \quad (4.24)$$

$$b_i^{pq}=\begin{cases} i^{p-1}, & p=q; \\ \dfrac{(\tau-2)(i^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(i-1)}, & p\neq q; \end{cases} \qquad b_{pq}^{i}=\begin{cases} i^{p-1}+(\tau-2)i, & p=q; \\ -i, & p\neq q; \end{cases} \tag{4.25}$$

$$b_\alpha^{pq}=\begin{cases} \alpha^{p-1}, & p=q; \\ \dfrac{(\tau-2)(\alpha^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(\alpha-1)}, & p\neq q; \end{cases} \qquad b_{pq}^{\alpha}=\begin{cases} \alpha^{p-1}+(\tau-2)\alpha, & p=q; \\ -\alpha, & p\neq q, \end{cases} \tag{4.26}$$

где под i^{p-1} (α^{p-1}) понимается степень числа i (α) с показателем $p-1$. Тогда из соотношений (2.14)-(2.17), (2.22)-(2.25) при начальных значениях (4.24)-(4.26) получаем

$$C_i^{pq}=\begin{cases} i^{p-1}, & p=q; \\ \dfrac{(\tau-2)(i^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(i-1)}, & p\neq q; \end{cases} \qquad C_{pq}^{i}=\begin{cases} i^{p-1}, & p=q; \\ 0, & p\neq q; \end{cases} \tag{4.27}$$

$$C_\alpha^{pq}=\begin{cases} \alpha^{p-1}, & p=q; \\ \dfrac{(\tau-2)(\alpha^{\tau}-1)}{\tau(\tau-1)(\alpha-1)}, & p\neq q; \end{cases} \qquad C_{pq}^{\alpha}=\begin{cases} \alpha^{p-1}, & p=q; \\ 0, & p\neq q. \end{cases} \tag{4.28}$$

Далее можно показать аналогично, как это сделано для регулярных гиперполос в работе [8], что для нераспадающихся гиперполос CH_m^{τ} в общем случае при начальных условиях (4.24)-(4.27) величины ℓ_i^j и относительные тензоры ℓ_{ij}, Q_i^j являются невырожденными. В дальнейшем рассмотрим такие вырожденные нераспадающиеся гиперполосы CH_m^{τ}, для которых тензоры ℓ_{ij}, Q_i^j невырождены.

Введем предварительно в рассмотрение для тензора Q_i^j взаимный тензор $\widetilde{Q}_i^j$:

$$Q_k^j\widetilde{Q}_i^k=Q_i^k\widetilde{Q}_k^j=\delta_i^j, \quad \nabla_\delta\widetilde{Q}_i^k+\widetilde{Q}_i^k(\pi_n^n-\pi_0^0)=0, \tag{4.29}$$

что позволяет определить с помощью тензора ℓ_{ij} симметрический тензор L_{ij}:

$$L_{ij}=-\frac{1}{2}(\widetilde{Q}_i^k\ell_{kj}+\widetilde{Q}_j^k\ell_{ki}), \quad \nabla_\delta L_{ij}=-L_{ij}(\pi_0^0+\pi_n^n). \tag{4.30}$$

Тензор L_{ij} в общем случае невырожденный (например, это можно показать при начальных условиях (4.24)-(4.27).

Квазитензор t_α^i и тензор L_{ij} дают возможность построить геометрический объект второго порядка $\{L_{ij}, L_{i\alpha}, L_{\alpha\beta}\}$ и геометрический объект второго порядка $\{L_{ij}, L_{i\alpha}\}$-подобъект этого объекта:

$$L_{i\alpha}=-L_{ij}t_\alpha^j, \quad \nabla L_{i\alpha}=-L_{i\alpha}(\omega_n^n-\omega_0^0)+L_{ij}\omega_\alpha^j+L_{i\alpha s}\omega^s, \tag{4.31}$$

$$L_{\alpha\beta}=-L_{i\alpha}t_\beta^i=L_{ij}t_\alpha^i t_\beta^j; \quad \nabla_\delta L_{\alpha\beta}=-L_{\alpha\beta}(\pi_n^n-\pi_0^0)+L_{i\beta}\pi_\alpha^i+L_{i\alpha}\pi_\beta^i. \tag{4.32}$$

5. Зак. 10461.

Комбинируя системы величин Λ_i (2.14), $\bar{\Lambda}_\alpha$ (2.17), Λ^i (2.39), L_{ij} (4.30), введем в рассмотрение еще пару квазитензоров второго порядка.

$$\{\ell_i, L_{ij}, L_{i\alpha}\} \quad \text{и} \quad \{\ell_\alpha, \ell_i, L_{i\alpha}, L_{\alpha\beta}, L_{ij}\}. \qquad (4.33)$$

Действительно, пользуясь уравнениями (2.18), (2.21), (2.44), (4.30), (4.31), находим, что системы величин

$$\ell_i = -(L_{ij}\Lambda^j + \Lambda_i), \quad (4.34) \qquad \ell_\alpha = -(L_{i\alpha}\Lambda^i + \bar{\Lambda}_\alpha) \quad (4.35)$$

удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla \ell_i = -\ell_i \omega_0^0 + L_{ij}\omega_n^j + L_{i\alpha}\omega_n^\alpha - \omega_i^0 + \ell_{is}\omega^s, \qquad (4.36)$$

$$\nabla \ell_\alpha = -\ell_\alpha \omega_0^0 + \ell_i \omega_\alpha^i + L_{i\alpha}\omega_n^i + L_{\alpha\beta}\omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 + \ell_{\alpha s}\omega^s. \qquad (4.37)$$

Из уравнений (4.30)-(4.32), (4.36), (4.37) следует, что величины (4.33) – квазитензоры второго порядка.

Положим,

$$\lambda_p = a^{sv} a^{fw} \ell_{vwp} (C^\alpha_{pf}\bar{\Lambda}_\alpha + C^i_{sf}\Lambda_i), \qquad (4.38)$$

$$\eta_p = \ell_{vwp}(C_i^{vw}\bar{\Lambda}^i + C_\alpha^{vw}\Lambda^\alpha). \qquad (4.39)$$

Величины λ_p и η_p, определяемые в окрестности второго порядка элемента гиперполосы CH_m^r, в силу уравнений (1.25), (2.18)-(2.21), (2.26), (2.52) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_\delta \lambda_p = -\lambda_p(2\pi_0^0 - \pi_n^n) + a^{sv}a^{fw}\ell_{vwp}C^\alpha_{sf}\pi^0_\alpha + a^{sv}a^{fw}\ell_{vwp}C^i_{sf}\pi^0_i, \qquad (4.40)$$

$$\nabla_\delta \eta_p = -\eta_p(2\pi_0^0 - \pi_n^n) - \ell_{vwp}C_\alpha^{vw}\pi_n^\alpha - \ell_{vwp}C_i^{vw}\pi_n^i. \qquad (4.41)$$

Используя тензор Дарбу ℓ_{pqt} (2.48), строим симметрический тензор

$$L_{pq} = a^{sv}a^{tw}\ell_{pst}\ell_{qvw}, \quad \nabla L_{pq} + 2L_{pq}\omega_0^0 = L_{pqs}\omega^s, \qquad (4.42)$$

который в общем случае является невырожденным (например, при начальных условиях (4.24)-(4.27), т.е. существует взаимный ему тензор L^{pq}:

$$L^{ps}L_{sq} = \delta^p_q; \quad \nabla L^{pq} - 2L^{pq}\omega_0^0 = L^{pq}_s\omega^s. \qquad (4.43)$$

Наконец, можно построить еще один относительный инвариант второго порядка – K_0 (ранее нами построен относительный инвариант ℓ_0 (2.54). Действительно, рассматривая свертки величин ℓ_i^j (4.5) и ℓ_α^β (4.7), имеем

$$\ell_i^i = \tilde{\ell}_0, \qquad \delta\tilde{\ell}_0 = \tilde{\ell}_0(\pi_n^n - \pi_0^0) - \ell_i^\alpha \pi_\alpha^i, \qquad (4.44)$$

$$\ell_\alpha^\alpha = \bar{\ell}_0, \qquad \delta\bar{\ell}_0 = \bar{\ell}_0(\pi_n^n - \pi_0^0) + \ell_i^\alpha \pi_\alpha^i. \qquad (4.45)$$

Откуда окончательно получаем

$$K_0 = \tilde{\ell}_0 + \ell_0; \qquad dK_0 = K_0(\omega_n^n - \omega_0^0) + K_{0s}\omega^s. \qquad (4.46)$$

В общем случае инвариант $K_0 \neq 0$. Например, при начальных условиях (4.24)-(4.27) $K_0 = \sum\limits_{n=r+1}^{n-1} \frac{u^{2r}-1}{u^2-1} \neq 0$ см[8].

2. Окрестность третьего порядка

Построим систему величин, связанных с третьей дифференциальной окрестностью элемента вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}, следуя работам [2],[8].

Продолжение уравнений (1.20) и (2.46) приводит соответственно к дифференциальным уравнениям

$$\nabla a_{pqt}+a_{pqt}(2\omega^0_0+\omega^n_n)+a_{(pq}\omega^0_{t)}-a_{s(p}a_{qt)}\omega^s_n=a_{pqts}\omega^s, \qquad (4.47)$$

$$\nabla d_p+d_p\omega^0_0-a_{ps}\omega^s_n+\omega^0_p=t_{ps}\omega^s, \qquad (4.48)$$

где, вообще говоря, $t_{ps}\neq t_{sp}$, а величины a_{pqts} симметричны по первым трем индексам p,q,t. Система величин $\{t_{ps}\}$ принадлежит окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^{τ}_{m} и удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_\delta t_{pq}+2t_{pq}\pi^0_0+d_{(p}\pi^0_{q)}-(a_{pqs}+a_{pq}d_s)\pi^s_n+2a_{pq}\pi^0_n+$$
$$+b^i_{pq}\pi^0_i+b^\alpha_{pq}\pi^0_\alpha+a_{ps}a^s_{\alpha q}\pi^\alpha_n+a_{ps}a^s_{iq}\pi^i_n=0. \qquad (4.49)$$

При помощи этих величин t_{pq} третьего порядка и уже построенных ранее величин второго порядка последовательно определяем новые величины тертьего порядка $T, T_0, \hat{T}_{pq}, \hat{T}_p, T^p, K_p$:

$$T=\frac{1}{\tau}(t_{pq}-d_p d_q)a^{pq}, \qquad (4.50)$$

$$T_0=T-\bar{\Lambda}^i\ell_i-\Lambda^\alpha\ell_\alpha, \qquad (4.51)$$

$$\hat{T}_{pq}=t_{pq}-d_p d_q-Ta_{pq}, \qquad (4.52)$$

$$\hat{T}_p=a^{vw}a^{st}\hat{T}_{vs}\ell_{wtp}+(\lambda_p-\eta_p), \qquad (4.53)$$

$$T^p=L^{pq}\hat{T}_q, \qquad (4.54)$$

$$K_p=d_p-a_{pq}T^q, \qquad (4.55)$$

уравнения которых в силу (1.20),(1.25),(2.18)-(2.21), (2.48),(4.36),(4.37),(4.40),(4.41),(4.43),(4.48),(4.49) имеют вид

$$\delta T-T(\pi^n_n-\pi^0_0)-2d_p\pi^p_n+2\pi^0_n+\bar{\Lambda}^i\pi^0_i+\Lambda^\alpha\pi^0_\alpha+\bar{\Lambda}_\alpha\pi^\alpha_n+\Lambda_i\pi^i_n=0, \qquad (4.56)$$

$$\delta T_0-T_0(\pi^n_n-\pi^0_0)-2(d_p\pi^s_n-\pi^0_n+\ell_i\pi^i_n+\ell_\alpha\pi^\alpha_n)=0, \qquad (4.57)$$

$$\nabla_\delta\hat{T}_{pq}+2\hat{T}_{pq}\pi^0_0-\ell_{pqs}\pi^s_n+c^i_{pq}\pi^0_i+c^\alpha_{pq}\pi^0_\alpha-\Lambda_i a_{pq}\pi^i_n-$$
$$-\bar{\Lambda}_\alpha a_{pq}\pi^\alpha_n+a_{ps}a^s_{qi}\pi^i_n+a_{ps}a^s_{q\alpha}\pi^\alpha_n=0, \qquad (4.58)$$

$$\nabla_\delta\hat{T}_p+\hat{T}_p(2\pi^0_0-\pi^n_n)-L_{pq}\pi^q_n=0, \qquad (4.59)$$

$$\nabla T^p=T^p\omega^n_n+\omega^p_n+T^p_q\omega^q, \qquad (4.60)$$

$$\nabla K_p=-K_p\omega^0_0-\omega^0_p+K_{pq}\omega^q. \qquad (4.61)$$

Из уравнений (4.60) и (4.61) следует, что каждая из систем величин T^p и K_p образует квазитензор третьего порядка исследуемой гиперполосы CH^{τ}_{m}. Назовем T^p и K_p второй парой нормальных квазитензоров третьего порядка данной гиперполосы CH^{τ}_{m} (в отличие от пары квазитензоров третьего порядка Λ^p (2.57) и Λ_p (2.58). Кроме того, системы величин T^p+K^p и $K_p+\Lambda_p$ образуют тензоры третьего порядка

$$\nabla(T^p+\Lambda^p)=(T^p+\Lambda^p)\omega^n_n+(\ldots)_s\omega^s, \qquad (4.62)$$

$$\nabla(K_p+\Lambda_p)=-(K_p+\Lambda_p)\omega^0_0+(\ldots)_s\omega^s, \qquad (4.63)$$

что непосредственно видно из соотношений (2.58),(4.60) и (2.57),(4.61). Наконец, величина

$$\bar{J} = \ell_{pqt} L^{qt} (T^p + \Lambda^p) \qquad (4.64)$$

представляет собой абсолютный инвариант, так как из (2.52), (4.43),(4,62) получаем

$$\delta \bar{J} = 0.$$

3. Построение внутренних инвариантных реперов $\{M_{\mathcal{J}}\}$ и $\{\sigma^{\mathcal{J}}\}$ третьего порядка нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}.

Продолжение уравнений (2.47) вводит величины t^{pq}, принадлежащие окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^{τ}_{m} :

$$\nabla d^p = d^p \omega^n_n - a^{ps} \omega^0_s + \omega^p_n - t^{pq} \omega^n_q , \qquad (4.65)$$

где, вообще говоря, $t^{pq} \neq t^{qp}$. Система величин $\{t^{pq}\}$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_{\delta} t^{pq} = 2t^{pq} \pi^n_n + d^{(p} \pi^{q)}_n - (a^{pqs} + a^{pq} d^s) \pi^0_s + 2a^{pq} \pi^0_n +$$

$$+ b^{pq}_i \pi^i_n + b^{pq}_{\alpha} \pi^{\alpha}_n + a^{ps} a^{\alpha q} \pi^0_{\alpha} + a^{ps} a^{iq}_s \pi^0_i . \qquad (4.66)$$

Кроме того, рассмотрим еще одну величину $\bar{\bar{T}}$ третьего порядка:

$$\bar{\bar{T}} = \frac{1}{2} (t^{pq} - d^p d^q) a_{pq} , \qquad (4.67)$$

$$\delta \bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}} (\pi^n_n - \pi^0_0) + 2\pi^0_n - 2d^p \pi^0_p + \Lambda_i \pi^i_n + \bar{\Lambda}_{\alpha} \pi^{\alpha}_n + \bar{\Lambda}^i \pi^0_i + \Lambda^{\alpha} \pi^0_{\alpha} . \qquad (4.68)$$

Величины третьего порядка T (4.50) и $\bar{\bar{T}}$ (4.67) позволяют построить инвариантные реперы $\{M_{\mathcal{J}}\}$ и $\{\sigma^{\mathcal{J}}\}$, внутренним образом связанные с окрестностью третьего порядка элемента нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}.

Действительно, величины

$$\tilde{X} = \frac{1}{2} (\Lambda + T + a_{pq} \Lambda^p \Lambda^q) + \Lambda^p d_p \; ; \; \bar{Y} = \frac{1}{2} (\Lambda + \bar{\bar{T}} + a^{pq} \Lambda_p \Lambda_q) + \Lambda_p d^p$$

в силу соотношений (2.18),(2.19),(2.44),(2.45),(4.56), (1.20),(2.60),(4.48),(4.68),(1.25),(2.59),(4.65) удовлетворяют соответственно уравнениям (2.62) и (2.63) и, следовательно, определенные с их помощью точка

$$\tilde{M}^*_n = A_n + \Lambda^{\alpha} A_{\alpha} + \bar{\Lambda}^i A_i + \Lambda^p A_p + \tilde{X} A_0$$

и гиперплоскость

$$\bar{\bar{\sigma}}^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \bar{\Lambda}_{\alpha} \tau^{\alpha} + \bar{Y} \tau^n$$

внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^{τ}_{m}. При этом условие инцидентности (2.61) точки $\tilde{M}^*_n$ и гиперплоскости $\bar{\bar{\sigma}}^0$ не выполняется. Однако можно выделить на прямой $[M_0, \tilde{M}^*_n]$ инвариантную точку

$$\bar{\bar{M}}_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + A^{\alpha} A_{\alpha} - (\bar{Y} + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda_i \bar{\Lambda}^i + \Lambda^{\alpha} \bar{\Lambda}_{\alpha}) A_0 ,$$

внутренним образом присоединенную к гиперполосе CH^{τ}_{m} и инцидентную гиперплоскости $\bar{\bar{\sigma}}^0$, а в пучке гиперплоскостей $[\bar{\bar{\sigma}}^0, \sigma^n]$ — внутреннюю инвариантную гиперплоскость

$$\tilde{\tilde{\sigma}}^{o}=\tau^{o}+\Lambda_{p}\tau^{p}+\Lambda_{i}\tau^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha}-(\tilde{X}+\Lambda_{p}\Lambda^{p}+\Lambda_{i}\bar{\Lambda}^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\Lambda^{\alpha})\tau^{n}$$

инцидентную точке $\tilde{M}^{*}_{n}$. Более того, нетрудно показать, что величины

$$\Lambda^{o}=\frac{\alpha\tilde{X}+\beta\bar{X}}{\alpha+\beta}, \quad \Lambda_{n}=\frac{\alpha\tilde{Y}+\beta\bar{Y}}{\alpha+\beta}, \qquad (4.69)$$

где

$$\bar{X}=-(\bar{Y}+\Lambda_{p}\Lambda^{p}+\Lambda_{i}\bar{\Lambda}^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}); \quad \tilde{Y}=-(\tilde{X}+\Lambda_{p}\Lambda^{p}+\Lambda_{i}\bar{\Lambda}^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}),$$

а α и β произвольные действительные числа, удовлетворяют соответственно уравнениям (2.62) и (2.63). Таким образом, точка

$$M_{n}=A_{n}+\Lambda^{p}A_{p}+\bar{\Lambda}^{i}A_{i}+\Lambda^{\alpha}A_{\alpha}+\Lambda^{o}A_{o} \qquad (4.70)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^{o}=\tau^{o}+\Lambda_{p}\tau^{p}+\Lambda_{i}\tau^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha}+\Lambda_{n}\tau^{n} \qquad (4.71)$$

внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^{τ}_{m}, двойственны друг другу и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (2.61). Построение точек $\{M_{p}, M_{i}, M_{\alpha}\}$ и гиперплоскостей $\{\sigma^{p}, \sigma^{i}, \sigma^{\alpha}\}$ соответственно реперов $\{M_{\mathcal{J}}\}$ и $\{\sigma^{\mathcal{J}}\}$ проводится так же, как и в § 2.

Итак, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы CH^{τ}_{m}, имеют следующий вид:

$$M_{o}=A_{o}, \qquad \sigma^{o}=\tau^{o}+\Lambda_{p}\tau^{p}+\Lambda_{i}\tau^{i}+\bar{\Lambda}_{\alpha}\tau^{\alpha}+\Lambda_{n}\tau^{n},$$

$$M_{p}=A_{p}-\Lambda_{p}A_{o}, \qquad \sigma^{p}=\tau^{p}-\Lambda^{p}\tau^{n},$$

$$M_{i}=A_{i}-\Lambda_{i}A_{o}, \qquad \sigma^{i}=\tau^{i}-t^{i}_{\alpha}\tau^{\alpha}-\Lambda^{i}\tau^{n},$$

$$M_{\alpha}=A_{\alpha}+t^{i}_{\alpha}A_{i}-\Lambda_{\alpha}A_{o}, \qquad \sigma^{\alpha}=\tau^{\alpha}-\Lambda^{\alpha}\tau^{n}, \qquad (4.72)$$

$$M_{n}=A_{n}+\Lambda^{\alpha}A_{\alpha}+\bar{\Lambda}^{i}A_{i}+\Lambda^{p}A_{p}+\Lambda^{o}A_{o}, \qquad \sigma^{n}=\tau^{n}.$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что если соприкасающаяся плоскость второго порядка базисной поверхности V^{τ}_{m} нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m} заполняет все пространство, то объект четвертого порядка гиперполосы CH^{τ}_{m} является полным.

§ 5. Пучок соприкасающихся гиперквадрик вырожденной нераспадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}

О п р е д е л е н и е. Соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы $CH^{\tau}_{m}\subset P_{n}$ называется гиперквадрика Q_{n-1}, которая имеет касание второго порядка с данной гиперполосой CH^{τ}_{m}, т.е. точечное касание второго порядка с базисной поверхностью V^{τ}_{m} гиперполосы CH^{τ}_{m} и тангенциальное касание того же порядка с ее тангенциально вырожденной гиперповерхностью V^{τ}_{n-1} [9], [8].

Пусть уравнения гиперквадрики Q_{n-1} в точечном и тангенциальном реперах заданы в виде

$$g_{\mathcal{J}\mathcal{K}}x^{\mathcal{J}}x^{\mathcal{K}}=0 \quad \text{и} \quad g^{\mathcal{J}\mathcal{K}}x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{K}}=0. \qquad (5.1)$$

Тогда требование касания второго порядка гиперквадрики с гиперполосой CH^{τ}_{m} с учетом соотношений (I.2), (I.6) – (I.10), (I.12), (I.13) приводит к равенствам

$$g_{oo}=g_{op}=g_{oi}=g_{o\alpha}=g^{nn}=g^{pn}=g^{ni}=g^{n\alpha}=0, \qquad (5.2)$$

$$g_{pq} + g_{on} a_{pq} = g^{pq} + g^{on} a^{pq} = 0 . \tag{5.2}$$

Кроме того, пронормируем коэффициенты уравнения гиперквадрики Q_{n-1} так, чтобы

$$g_{on} = g^{on} = -1. \tag{5.3}$$

В силу (5.3) непосредственно получаем из (5.2), что

$$g_{pq} = a_{pq} ; \quad g^{pq} = a^{pq} . \tag{5.4}$$

Рассмотрим далее лишь те гиперквадрики Q_{n-1}, относительно которых касательная плоскость $T_\tau(A_o)$ поверхности центров V_τ и характеристика $E_{n-\tau-1}(A_o)$ регулярной гиперполосы H_τ, ассоциированной естественным образом с данной вырожденной нераспадающейся гиперполосой CH^τ_m, полярно сопряжены:

$$g_{pi} = g_{p\alpha} = g^{pi} = g^{p\alpha} = 0 . \tag{5.5}$$

Из оставшегося $\dfrac{(n+\tau)+(n-\tau)^2}{2}$ — параметрического семейства соприкасающихся гиперквадрик рассмотрим те, которые инвариантны относительно преобразований стационарной подгруппы элемента гиперполосы CH^τ_m:

$$\nabla_\delta g_{\gamma\varkappa} = \theta g_{\gamma\varkappa} , \tag{5.6}$$

откуда с учетом (5.3), получим

$$\theta(\delta) = -(\pi^o_o + \pi^n_n). \tag{5.7}$$

В силу соотношений (5.2)-(5.5),(5.7) система (5.6) примет вид:

$$\nabla_\delta g_{ij} = -(\pi^o_o + \pi^n_n) g_{ij} , \tag{5.8}$$

$$\nabla_\delta g_{i\alpha} = g_{ij} \pi^j_\alpha - (\pi^o_o + \pi^n_n) g_{i\alpha} , \tag{5.9}$$

$$\nabla_\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}(\pi^o_o + \pi^n_n) + g_{i\beta}\pi^i_\alpha + g_{i\alpha}\pi^i_\beta , \tag{5.10}$$

$$\nabla_\delta g_{in} = -g_{in}\pi^o_o + g_{ij}\pi^j_n + g_{i\alpha}\pi^\alpha_n - \pi^o_i , \tag{5.11}$$

$$\nabla_\delta g_{\alpha n} = -g_{\alpha n}\pi^o_o + g_{in}\pi^i_n + g_{i\alpha}\pi^i_n + g_{\alpha\beta}\pi^\beta_n - \pi^o_\alpha . \tag{5.12}$$

$$\nabla_\delta g_{pn} = a_{pq}\pi^q_n - g_{pn}\pi^o_o - \pi^o_p , \tag{5.13}$$

$$\nabla_\delta g_{nn} = g_{nn}(\pi^n_n - \pi^o_o) - 2(g_{\alpha n}\pi^\alpha_n + g_{in}\pi^i_n + g_{\alpha n}\pi^\alpha_n - \pi^o_n), \tag{5.14}$$

$$\nabla_\delta g_{pq} = -g_{pq}(\pi^o_o + \pi^n_n). \tag{5.15}$$

Уравнения (5.8)-(5.15) удовлетворяются в силу (4.30)-(4.32),(4.36)-(4.37),(4.48),(4.57),(1.20), если положить

$$g_{ij} = L_{ij} , \quad g_{i\alpha} = L_{i\alpha} , \quad g_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} , \quad g_{in} = \ell_i ,$$
$$g_{\alpha n} = \ell_\alpha , \quad g_{pn} = d_p , \quad g_{nn} = T_o + u_1 K_o + u_2 \ell_o , \tag{5.16}$$

где u_1 и u_2 - инвариантные параметры.

Таким образом, в дифференциальной окрестности третьего порядка элемента вырожденной нераспадающейся гиперполосы $CH^\tau_m \subset P_n$ получена двупараметрическая связка внутренне инвариантно присоединенных к гиперполосе CH^{τ}_{m} соприкасающихся гиперквадрик, уравнение поля которой в точечном репере записываются в виде

$$a_{pq}x^p x^q + L_{ij}x^i x^j + L_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2L_{i\alpha}x^i x^\alpha + 2\ell_i x^i x^n +$$
$$+2\ell_\alpha x^\alpha x^n + 2d_p x^p x^n + (T_o + u_1 K_o + u_2 \ell_o)(x^n)^2 = 2x^o x^n. \quad (5.17)$$

Уравнение поля соприкасающихся гиперквадрик (5.17) можно записать и в тангенциальном репере, определив необходимые коэффициенты $g^{\mathcal{I}\mathcal{K}}$ через величины (5.16) из условий $g^{\mathcal{I}\mathcal{K}} g_{\mathcal{K}\mathcal{J}} = \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}}$:

$$g_{ps} g^{sq} = \delta^q_p, \quad g_{ik} g^{kj} = \delta^j_i, \quad g^{op} = g_{nq} a^{pq},$$

$$g^{oi} = g_{nk} g^{ki} + g_{n\beta} g^{\beta i}; \quad g^{oo} + g_{nn} = g_{np} g^{op} + g_{ni} g^{io} + g_{n\alpha} g^{\alpha o};$$

$$g^{o\alpha} = g_{ni} g^{i\alpha} + g_{n\beta} g^{\beta\alpha}.$$

В частности, если вырожденная гиперполоса CH^{τ}_{m} является распадающейся [1], т.е. характеристика $E_{n-\tau-1} = [A_o, A_i, A_\alpha]$ распадается при этом на две плоскости $E_s = [A_o, A_i]$ и $E_{n-m-1} = [A_o, A_\alpha]$, то

$$\pi^i_\alpha = t^i_\alpha = L_{\alpha\beta} = L_{\alpha i} = 0; \quad \ell_i = -\Lambda_i, \ \ell_\alpha = -\Lambda_\alpha \quad (5.18)$$

Уравнение поля соприкасающихся гиперквадрик (5.17) для вырожденных распадающихся гиперполос CH^{τ}_{m} в общем случае, в силу (5.18), имеет вид :

$$a_{pq}x^p x^q + L_{ij}x^i x^j - 2\Lambda_i x^i x^n - 2\Lambda_\alpha x^\alpha x^n +$$
$$+2d_p x^p x^n + (T_o + u_1 K_o + u_2 \ell_o)(x^n)^2 = 2x^o x^n \quad (5.19)$$

Заметим, что исследования §I-§4 для случая распадающихся гиперполос CH^{τ}_{m} при $m = n-2$ в силу соотношений (5.I8), приводят к результатам работы [I].

Рассмотрим регулярную гиперполосу H_τ ассоциированную естественным образом с данной гиперполосой CH^{τ}_{m}. Базисной поверхностью гиперполосы H_τ является поверхность центров V_τ плоских образующих E_s базисной поверхности V^{τ}_{m} данной гиперполосы CH^{τ}_{m}, а огибающей главных касательных гиперплоскостей гиперполосы H_τ является тангенциально вырожденная гиперповерхность V^{τ}_{n-1}. Тогда, как легко показать, потсроение поля соприкасающихся гиперквадрик (5.I7) для рассматриваемой регулярной гиперполосы H_τ приводит к результатам работы [8].

Список литературы

I. П о п о в Ю.И., М и ш е н и н а Т.И. Инвариантное оснащение распадающейся $(n-2)$-мерной гиперполосы CH^{τ}_{n-2} ранга τ многомерного проективного пространства P_n. -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.5, Калининград, I974, с.I03-I30.

2. Л а п т е в Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Труды Моск.матем.об-ва, I953, т.2, с. 275-383.

3. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

4. Ч и к м а з я н А.В. Двойственная нормализация. - Докл. Арм. ССР, 1959, т.128, №4, с.151-157.

5. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. - Труды геометрич. семинара ВИНИТИ, М., 1966, т.1, с.239-263.

6. В а с и л ь я н М.А. Об инвариантном оснащении гиперполосы. - Докл. АН Арм. ССР, 1970, т.50, №2, с.65-69.

7. А к и в и с М.А. Фокальные образы поверхности ранга r. - Известия вузов. Математика, 1957, №1, с.9-19.

8. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. - Известия вузов. Математика, 1975, (в печати).

9. О л о н и ч е в П.М. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. - Докл. АН СССР, 1951, т.180, №2, с.165-168.

10. Casanova G. „La nation de pôle harmonique". Rev. math. spéc., 1955, t. 65, №6, s. 437-440.

О.С. Р е д о з у б о в а

О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПАР θ КОНГРУЭНЦИЙ

Проективные свойства пар θ конгруэнций изучены в работах [1], [2]. Цель настоящей работы - изучение метрических свойств пар θ.

§1. Общая характеристика пар θ конгруэнций в E_3

О п р е д е л е н и е 1.1. Пара прямолинейных конгруэнций $\{F_a, F'_a\} = \{\tau_a\}$, где F_a, F'_a - фокусы прямых τ_a этих конгруэнций, называется парой θ, если: 1/ касательная плоскость поверхности (F_1) проходит через фокус F_2, касательная плоскость поверхности (F'_1) - через фокус F'_2; 2/ касательная плоскость фокальной поверхности (F_2) содержит точку F'_1, а касательная плоскость поверхности (F'_2) - точку F_1. Обе конгруэнции не являются параболическими ($a = 1, 2$).

С парой конгруэнций $\{\tau_a\}$ связана конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$. Пусть K_a - точки пересечения прямых τ с соответствующими прямыми τ_a. Отнесем конфигурацию к ортонормированному подвижному реперу $\{A, \vec{e}_\kappa\}$ ($\kappa = 1, 2, 3$), вершина A которого принадлежит прямой τ, а вектор $\bar{e}_3$ служит направляющим вектором этой прямой. Деривационные формулы репера $\{A, \bar{e}_\kappa\}$ имеют вид

$$dA = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \qquad (1.1)$$