

**Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин**

**ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ  
ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРОСА**

84

*Рассмотрена скоростная модель внутреннего трения. Показано, что применение линейной скоростной модели внутреннего трения позволяет описать результаты опубликованных экспериментальных исследований продольных затухающих колебаний груза на коротком тросе.*

*A velocity model of internal friction is considered. It is shown that the use of a linear velocity model of internal friction makes it possible to describe the results of published experimental studies of longitudinal damped oscillations of cargo on a short cable.*

**Ключевые слова:** внутреннее трение, продольные колебания, экспериментальные данные, коэффициент демпфирования.

**Key words:** internal friction, longitudinal oscillations, experimental data, damping factor.

Проблема влияния внутреннего трения на динамику колебаний упруго-вязких систем традиционно привлекает внимание исследователей [1–3]. Особенно важен учет указанного явления при изучении вертикального подъема (спуска) груза с учетом упругих свойств троса [3–5]. В настоящее время не сформированы общие рекомендации по выбору модели внутреннего трения и числовых значений коэффициентов демпфирования. Поэтому методы определения указанных параметров на основе экспериментальных исследований колебательных процессов для конкретных видов упругих связей [6–7] являются весьма актуальными.

Если пренебречь силой сопротивления воздуха, то вертикальное движение груза на сравнительно коротком упругом тросе описывается дифференциальным уравнением [1; 3; 5]

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -c \cdot y - F_T, \quad (1)$$

где  $m$  – масса груза, много большая массы троса, поэтому последней можно пренебречь;  $c$  – коэффициент продольной жесткости троса;  $t$  – время;  $y$  – вертикальная координата груза, отсчитываемая от положения статического равновесия;  $F_T$  – сила внутреннего трения троса.



В [1] доказано, что сила внутреннего трения определяется площадью петли гистерезиса и мало зависит от ее формы. Это позволяет по экспериментальным измерениям затухающих колебаний определить параметры силы внутреннего трения. Но прежде нужно принять модель указанной силы.

Я.Г. Пановко [1] показал, что и способ медленно меняющихся амплитуд, и асимптотический, и энергетический метод приводят к одинаковым результатам. Огибающая  $A(t)$  затухающих колебаний  $y(t)$  может быть выражена через скорость или через координату.

В [1] были предложены простые и эффективные формулы:

$$F_T = B_n V^n \text{sign}(V), \quad (2)$$

$$F_T = b_n A^n \sqrt{\frac{1-y^2}{A^2}} \text{sign}(V), \quad (3)$$

где  $V$  – скорость груза;  $A$  – наибольшее (текущее) отклонение груза от положения равновесия;  $B_n, b_n$  – коэффициенты демпфирования (эмпирические константы, зависящие от порядка модели  $n$ ).

Работы [6; 7] используют аналогичные формулы, но в [7] формула (3) ошибочно записана без знаковой функции от скорости. Можно согласиться с выводом [7] о преимуществе использования скоростных моделей (2) по сравнению с гистерезисными (3). По сути, Я.Г. Пановко [1] использует формулы (3) не для решения дифференциального уравнения затухающих колебаний, а лишь для получения формул демпфирующих коэффициентов.

На рисунке 1 представлены результаты экспериментального исследования [6] затухающих колебаний груза коротком тросе длиной 2 м с грузом.

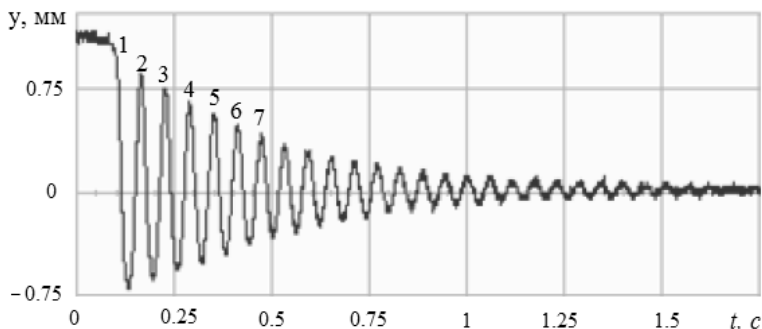


Рис. 1. Результаты экспериментального исследования затухающих колебаний груза коротком тросе [6]

Автор [6] утверждает, что наилучшее согласие результатов решения уравнения (1) численным методом получается при использовании параболической зависимости для силы внутреннего трения:

$$F_T(V) = \text{sign}(V)(B_0 + B_2 V^2) + B_1 V, \quad B_0 = 0,002, B_1 = 7,7, B_2 = 60. \quad (4)$$

В подтверждение приведен рисунок 2 с экспериментальными точками, снятыми с рисунка 1 и лежащими на огибающей кривой.

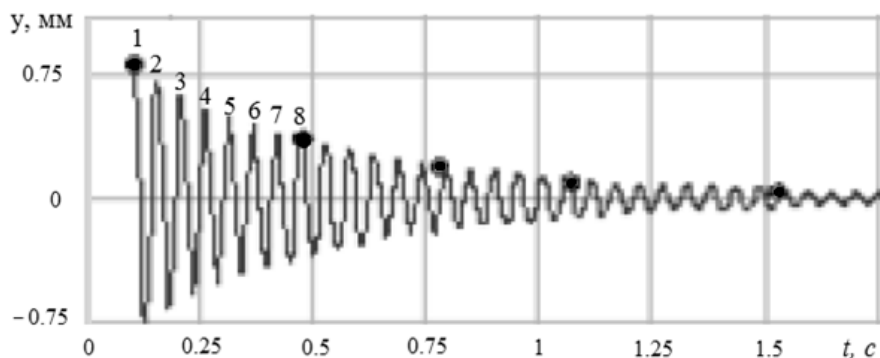


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов [6] затухающих колебаний с экспериментальными данными

Результаты, полученные в [6], нельзя считать достоверными из-за нескольких неточностей. Период (точнее время между соседними максимумами) найден в [6] довольно точно: 0,06 с (уточненное значение  $T_0 = 0,0606$  с). Частота колебаний  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 103,7$  с<sup>-1</sup>. Коэффициент жесткости троса  $c_0 = m_0\omega_0^2 = 2,14 \cdot 103,7^2 = 2,301 \cdot 10^4$  Н/м.

В [6] приведено значение  $c = 2,355 \cdot 10^4$  Н/м. На осциллограмме (рис. 1) вторая опытная точка взята на 7-м максимуме, тогда как по расчету [6] этот максимум получается 8-м (рис. 2). Обращаем внимание, что на рисунке 1 модули максимальных отрицательных отклонений оказались меньше модулей следующих за ними положительных отклонений. Например, точка 2 выше 0,75 мм, а предыдущее отрицательное значение не достигает отметки  $y = -0,75$  мм. Это говорит о том, что на рисунке 1 из [6] неверно выставлена отметка нуля. Значит, экспериментальные точки на огибающей кривой в [6] определены неверно. Кроме того, нельзя признать удачным выбор экспериментальных точек на огибающей в произвольные моменты времени (рис. 2).

Найдем по рисунку 1 значения координаты в момент наибольшего отклонения. Для исправления указанной выше ошибки величины наибольших отклонений амплитуды (размах колебаний) рассчитаем как среднее между верхним и нижним значением и поместим в таблицу 1. От размерных перейдем к безразмерным (нормированным) величинам

$$a_j = A_j/A_1, \quad \tau_j = (t_j - t_1)/T.$$

Уточненные начальные условия к дифференциальному уравнению (1):

$$y(0,1) = A_1 = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad V(0,1) = 0. \quad (5)$$



Решение задачи Коши (1), (5) численным методом показало, что замена в формуле (4) значения коэффициента на  $B_0 = 0$  практически не отражается в результатах расчета. Далее будем использовать скоростную модель внутреннего трения первого порядка, в (2)  $n = 1$ :

$$F_T(V) = B_1 V, \quad F_T(V) = B_1 V,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0, \quad 2\alpha = \frac{B_1}{m} = 2 \frac{\ln(A_1 / A_{14})}{t_{14} - t_1} = 4,38 \text{ c}^{-1}. \quad (6)$$

Таблица 1

Исправленные опытные данные значений размаха колебаний

Номер точки $j$	$A_j$ , мм	$t_j$ , с	$a_j$	$T_j$
1	0,90	0,100	1	0
2	0,79	0,1606	0,875	1
3	0,70	0,221	0,775	2
4	0,62	0,282	0,687	3
5	0,55	0,342	0,609	4
6	0,48	0,403	0,532	5
7	0,415	0,464	0,460	6
8	0,35	0,524	0,388	7
9	0,31	0,585	0,343	8
10	0,27	0,645	0,299	9
11	0,237	0,706	0,262	10
12	0,18	0,827	0,199	12
13	0,14	0,948	0,155	14
14	0,108	1,071	0,120	16

Задача Коши (5)–(6) имеет известное аналитическое решение [1], представленное на рисунке 3. Решение задачи при исправленных параметрах хорошо согласуется с опытными данными не только на огибающей, как на рисунке 2, но и по максимальным отклонениям.

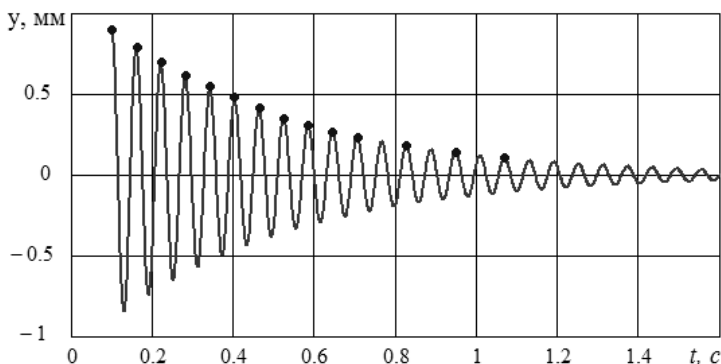


Рис. 3. Затухающие продольные колебания груза на тросе.  
Точки — исправленные экспериментальные данные [6] (табл. 1).  
Линия — аналитическое решение (5)–(6)



На рисунке 4 показано изменение сил упругости  $F_y$  и внутреннего трения  $F_T$ . Видно, что последние примерно в 20 раз меньше.

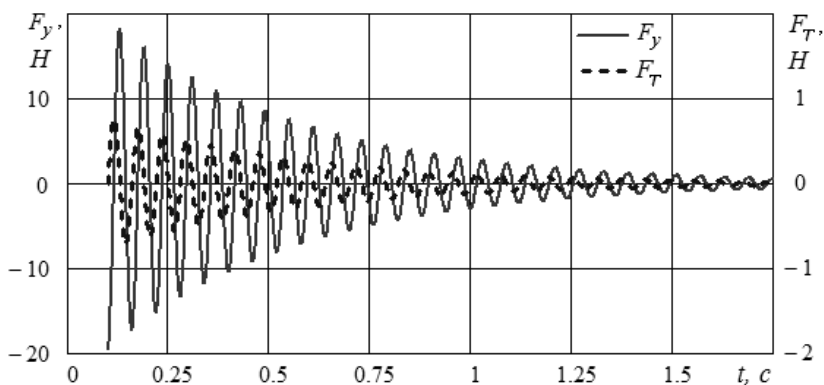


Рис. 4. Сила упругости и сила внутреннего трения троса при затухающих колебаниях

Далее проверим применимость скоростных моделей второго и третьего порядка.

Модель нулевого порядка соответствует сухому трению и здесь не рассматривается. Для расчета коэффициентов демпфирования, как в [7], воспользуемся формулами [1]

$$B_2 = \frac{3\pi c}{4\omega^3(t_1 - t_{14})} \left( \frac{1}{A_{14}} - \frac{1}{A_1} \right), \quad B_3 = \frac{\pi c}{2,356\omega^4(t_1 - t_{14})} \left( \frac{1}{A_{14}^2} - \frac{1}{A_1^2} \right).$$

Безразмерные уравнения огибающих линий в соответствии с [1] будут иметь вид

$$\text{при } n = 1 \quad a(\tau) = \exp(-k_1\tau), \quad k_1 = 0,133, \quad (7)$$

$$\text{при } n = 2 \quad a(\tau) = (1 + k_2\tau)^{-1}, \quad k_2 = 0,460,$$

$$\text{при } n = 3 \quad a(\tau) = (1 + k_3\tau)^{-0,5}, \quad k_3 = 4,307.$$

На рисунке 5 видно, что только огибающая линия первого порядка согласуется с экспериментальными данными. Увеличение порядка модели не приводит к повышению ее точности (на этот факт было указано в [1]), а в рассматриваемом случае даже наоборот.

В таблице 2 представлены параметры опытов [7], коэффициент жесткости каната во всех опытах  $c = 2,04 \cdot 10^4$  Н/м.

На рисунке 6 нормированные графики огибающих линий затухающих колебаний, рассчитанные по линейной модели, сравниваются с экспериментальными данными [7]; на рисунке 7 – расчеты выполнены по модели внутреннего трения второго порядка. Видно, что результаты расчетов по линейной модели заметно лучше согласуются с опытными данными.

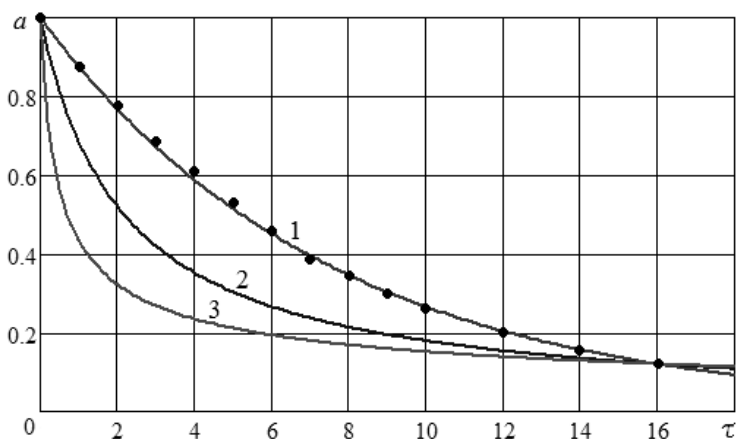


Рис. 5. Нормированные графики огибающих линий затухающих колебаний:  
 точки – экспериментальные данные (табл. 1);  
 1 – результаты расчетов при  $n = 1$ ; 2 –  $n = 2$ ; 3 –  $n = 3$

Таблица 2

Параметры опытов [7]

№	$m$ , кг	$T$ , с	$\omega$ , $\text{с}^{-1}$	$y(0)$ , мм	$t_{\text{кон}} \text{ с}$	$A_{\text{кон}} \text{ мм}$
1	6,14	0,089	70,36	1,13	5,76	0,05
2	4,12	0,073	85,90	1,03	4,90	0,02
3	2,14	0,053	119,19	0,64	1,42	0,03

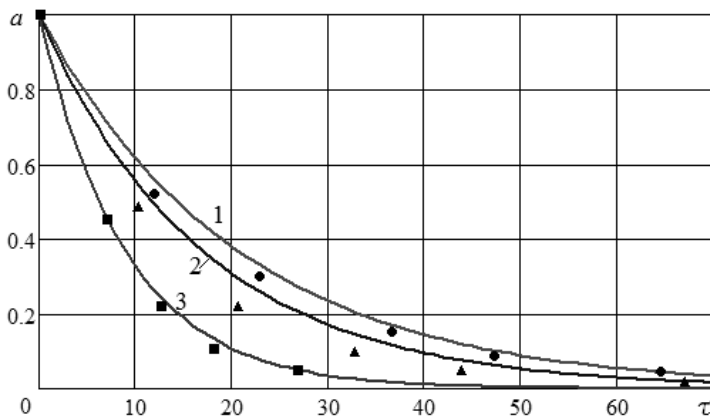


Рис. 6. Нормированные графики огибающих линий затухающих колебаний:  
 точки – экспериментальные данные [7];  
 линии – результаты расчетов при  $n = 1$ ;  
 1, 2, 3 – соответствуют номеру опыта в таблице 2

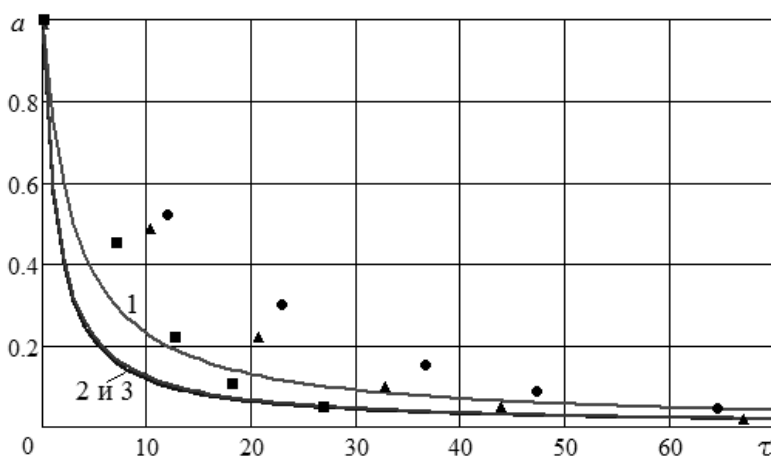


Рис. 7. Нормированные графики огибающих линий затухающих колебаний:  
точки – экспериментальные данные [7];  
линии – результаты расчетов при  $n = 2$ ;  
1, 2, 3 – соответствуют номеру опыта в таблице 2

Количественная адекватность линейной скоростной модели внутреннего трения может быть повышена, если усовершенствовать методику расчета коэффициентов демпфирования.

Решение на рисунке 6 получено при вычислении коэффициентов демпфирования так же, как в [6; 7] – по соотношению первого и последнего отклонения груза в опытах. Например, для опыта 2:

$$\alpha = \frac{\ln(A_1/A_6)}{t_6 - t_1} = 0,804 \text{ с}^{-1}, k_1 = 0,0588.$$

Тем самым находится огибающая, которая проходит строго через первую и последнюю экспериментальные точки (рис. 5). Но последнее, сравнительно малое отклонение вносит наибольшую относительную погрешность. Положение остальных точек во внимание не принимается. Найдем уравнение огибающей линии (7) методом наименьших квадратов по всем экспериментальным точкам. Тогда для опыта 2 получим

$$\bar{\alpha} = 0,948 \text{ с}^{-1}, \bar{k}_1 = 0,0695.$$

На рисунке 8 линии, рассчитанные по линейной модели с осредненными значениями коэффициентов демпфирования, лучше согласуются с экспериментальными данными, чем на рисунке 6. В [6; 7] используется только 5–6 экспериментальных точек. Применение статистических методов обработки данных позволяет повысить точность параметров модели с увеличением объема выборки (количества экспериментальных точек).

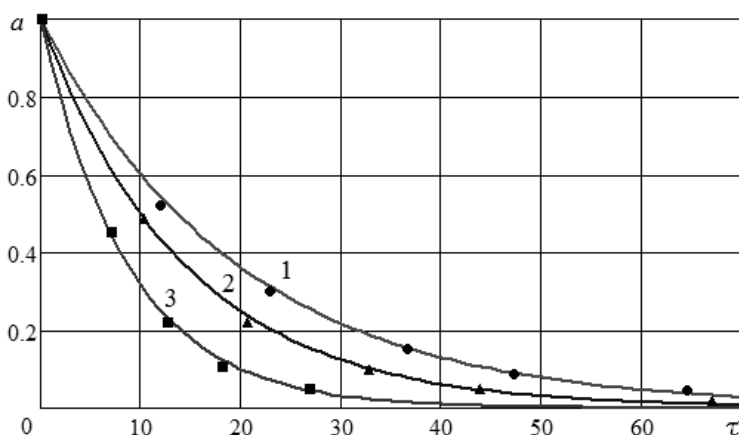


Рис. 8. Нормированные графики огибающих линий затухающих колебаний:  
 точки — экспериментальные данные [7];  
 линии — результаты расчетов при  $n = 1$   
 и средних значениях коэффициентов демпфирования;  
 1, 2, 3 — соответствуют номеру опыта в таблице 2

### Заключение

1. Применение линейной скоростной модели внутреннего трения позволяет описать результаты опубликованных экспериментальных исследований продольных затухающих колебаний груза на коротком тросе.

2. Увеличение порядка модели не приводит к повышению ее точности, по крайней мере при существующей точности экспериментальных исследований.

3. Количественная адекватность скоростной линейной модели внутреннего трения может быть повышена, если при расчете коэффициентов демпфирования использовать статистические методы и увеличить объем используемых экспериментальных данных.

### Список литературы

1. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем : монография. М., 1960.
2. Хромов В.Г., Хромов И.В., Хромов Е.В. Методика определения интегрального коэффициента внутреннего трения для поперечных колебаний стержня // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. 2016. № 3. С. 3–7.
3. Малиновский В.А. Стальные канаты. Одесса, 2001.
4. Ковальский Б.С., Жиряков А.И. Внутреннее трение при колебаниях каната // *Стальные канаты : сб. науч. тр.* Киев, 1970. Вып. 7. С. 84–93.
5. Наумов В.А., Кутузова Т.А. Динамическая нагрузка упругого троса лебедки // *Гидромеханика орудий лова : сб. науч. тр.* Калининград, 1997. С. 146–153.





6. Хромов О.В. Экспериментальное исследование характеристик внутреннего трения стальных спиральных канатов и проволоки // Труды Одесского политехнического университета. 2009. № 1 (31). С. 32–35.

7. Хромов О.В. Выбор модели внутреннего трения на основе экспериментальных осциллограмм затухающих колебаний системы // Вісник СевНТУ. Механіка, енергетика, екологія. Севастополь, 2010. Вип. 106. С. 35–39.

#### Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

#### About the authors

Prof. Nikolay Velikanov, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Prof. Vladimir Naumov, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey Koryagin, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru