2. Игошин В.А. Пульверизационное моделирование. 1 // Известия вузов. Матем. 1992. № 6. С.63-71.

3. Шапиро Я.Л. О квазигеодезическом отображении // Известия вузов. Матем. 1980. № 9. С. 53-55.

4. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig: Teubner, 1893. V.3. 830 s.

5. Егоров И.П. Движения в обобщенных дифференциально-геометрических пространствах // Итоги науки. Апгебра. Топология. Геометрия. 1965. ВИНИТИ. М., 1967. С.375-428.

6. Егоров А.И. Лакунарные общие пространства путей / Пензенский пед. ин-т. Пенза,1982. 56 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4044-82.

7. Егоров А.И. Проективные движения в общих пространствах путей / Пензенский пед. ин-т. Пенза, 1982. 56 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4542-82.

8. Tresse A. Determination des invariants punctuels de l′equation differentielle ordinaire du second ordre $y''=\omega(x,y,y')$. Leipzig,1896.

9. Cartan E. Sur les varietes a connexion projective // Bull. Soc. math/ France. 1924. V.52. P.205-241.

10. Аминова А.В. Проективные преобразования как симметрии дифференциальных уравнений / Казанский гос. ун-т. Казань, 1991. 18 с. Деп.в ВИНИТИ. № 1707-В91.

V.A.I g o s h i n

ON SYMMETRIES OF QUASIGEODESIC FLOWS

An every quasigeodesic flows (QF) $f\equiv(M,f)$ on a manifold M locally may be presented by a second order differentiale equation: $d^2x^i/dt^2=f^i(x^j,t,dx^j/dt)$,
$1 \le i, j \le n-1=\dim M$.

The series of theorems, concerning dimensions of the maximal Lie algebras of symmetries of QF, is obtained by the pulverization modelling. For example,

THEOREM 9. If the Lie algebra of projective symmetries of the QF $f\equiv(M,f)$ ($\dim M=n-1$) have dimension $r>n^2-2n+6$, then f is polinomial. QF of third order (with respect to the “speed” dx^j/dt), which is projectively equivalent to the trivial QF.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ КВАДРИК ДАРБУ НЕЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. С. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется конгруэнция (Q_m) соприкасающихся квадрик Дарбу [1] гладкой нелинейчатой поверхности S, ассоциированные квадрики которых являются невырожденными конусами, содержащими первую директрису Вильчинского [2]. Доказано, что точки пересечения квадрики $Q_m \in (Q_m)$ с первой директрисой Вильчинского поверхности S являются фокальными точками квадрики Q_m, причем поверхность S сдвоенная фокальная поверхность конгруэнции (Q_m). Подробно изучен подкласс конгруэнций (Q_m), определяемый вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа. Квадрики этого подкласса огибают поверхность нового типа, обладающую интересными геометрическими свойствами.

1. В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрим гладкую нелинейчатую поверхность S, отнесенную к каноническому реперу Финикова $\{\overline{A}_0, \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3\}$, где $A_0 \in S$, A_0A_1 и A_0A_2 - асимптотические касательные, A_0A_3 и A_1A_2 - первая и вторая директрисы Вильчинского поверхности S [2, с.4-7,12]. Замкнутая система дифференциальных уравнений поверхности S имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \ \omega_i^3 = \omega^j, \ \ \omega_i^0 = \omega_3^j, \ \ \omega_3^0 = a_k\omega^k, \ \ \omega_i^0 = a_j\omega^i + b_j\omega^j, \\ \omega_0^0 + \omega_3^3 = 0, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \ \ 2\omega_0^0 = p_k\omega^k, \ \ 6\omega_1^1 = p_2\omega^2 - p_1\omega^1, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} da_k \wedge \omega^k = \frac{4}{3}(a_1p_2 - a_2p_1)\omega^1 \wedge \omega^2, \\ da_j \wedge \omega^i + db_j \wedge \omega^j + \frac{1}{3}(2p_ib_j - p_ja_j)\omega^i \wedge \omega^j = 0, \\ dp_k \wedge \omega^k + 2(b_1 - b_2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ dp_2 \wedge \omega^2 - dp_1 \wedge \omega^1 + \left(\frac{2}{3}p_1p_2 + 6(b_1 + b_2) - 6\right)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\omega^i \overset{\text{def}}{=\!=} \omega_o^i$; i,j,k=1,2; i≠j и по индексам i,j здесь и в дальнейшем суммирование не производится.

Пучок соприкасающихся квадрик Дарбу Q_m поверхности S определяется уравнением:

$$F(m) \equiv x^1x^2 - x^0x^3 + m(x^3)^2 = 0, \tag{1.3}$$

где m=const - индекс Дарбу пучка. При каждом фиксированном значении m квадрики Q_m описывают конгруэнцию (Q_m). Имеем:

$$dF(m) = \Phi_k\omega^k, \tag{1.4}$$

где

$$\Phi_i \equiv \left(a_i + \tfrac{1}{2}p_i\right)\left(x^3\right)^2 - mx^jx^3 - \left(x^i\right)^2. \tag{1.5}$$

2. Уравнения $\Phi_i=0$ определяют две квадрики, ассоциированные с соприкасающейся квадрикой Q_m [2, с.56]. Так как для конгруэнции (Q_m) эти квадрики являются невырожденными конусами с общей прямолинейной образующей A_0A_3, то

$$m\neq 0, \tag{2.1}$$

$$a_1+\tfrac{1}{2}p_1=0,\quad a_2+\tfrac{1}{2}p_2=0. \tag{2.2}$$

Используя (1.1), запишем (2.2) в виде:

$$\omega_0^0+\omega_3^0=0. \tag{2.3}$$

Замыкая уравнение (2.3), получим:

$$b_1=b_2\overset{\text{def}}{==}b. \tag{2.4}$$

Продолжая систему (1.1) с учетом (2.2), (2.4), найдем:

$$da_i=a_{ii}\omega^i+\left(\tfrac{2}{3}a_i a_j+3b-\tfrac{3}{2}\right)\omega^j, \tag{2.5}$$

$$db=\left(a_{22}+2a_1 b-\tfrac{4}{3}a_2^2\right)\omega^1+\left(a_{11}+2a_2 b-\tfrac{4}{3}a_1^2\right)\omega^2. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. Точки пересечения квадрики $Q_m \in (Q_m)$ с первой директрисой Вильчинского A_0A_3 поверхности S являются ее фокальными точками, причем поверхность S есть сдвоенная фокальная поверхность конгруэнции (Q_m).

Доказательство. Фокальные точки квадрики Q_m определяются системой уравнений:

$$x^1x^2-x^0x^3+m\left(x^3\right)^2=0,\quad mx^2x^3+\left(x^1\right)^2=0,\quad mx^1x^3+\left(x^2\right)^2=0. \tag{2.7}$$

Прямая A_0A_3 пересекает квадрику Q_m (1.3) в точках $\overline{A}_0$, $m\overline{A}_0+\overline{A}_3$, причем $\overline{A}_0$ - сдвоенное решение.

3. Назовем конгруэнциями L конгруэнции (Q_m), характеризуемые условием:

$$a_1=a_2\overset{\text{def}}{==}a\neq 0. \tag{3.1}$$

Поверхность S, удовлетворяющую условиям (2.2), (2.4), (3.1), назовем поверхностью S_L.

Теорема 3.1. Конгруэнции L (поверхности S_L) существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Доказательство. Уравнения (2.5) и (2.6) в силу (3.1) приводятся к виду:

$$da=\left(\tfrac{2}{3}a^2+3b-\tfrac{3}{2}\right)\left(\omega^1+\omega^2\right),\quad db=\left(3b+2ab-\tfrac{2}{3}a^2\right)\left(\omega^1+\omega^2\right). \tag{3.3}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции L состоит из уравнений (3.3) и уравнений:

$$\begin{cases}\omega_0^3=0,\ \omega_i^3=\omega^j,\ \omega_i^j=\omega^i,\ \omega_i^0=\omega_3^j,\ \omega_3^0=a\left(\omega^1+\omega^2\right),\ \omega_i^0=a\omega^i+b\omega^j,\\ 3\omega_1^1=a\left(\omega^1-\omega^2\right),\ \omega_0^0+\omega_3^3=0,\ \omega_1^1+\omega_2^2=0,\ \omega_0^0+\omega_3^0=0.\end{cases} \tag{3.4}$$

Чистое замыкание системы (3.3). (3.4) тождественно обращается в нуль. Следовательно, по теореме Фробениуса эта система вполне интегрируема.

Рассмотрим наряду с каноническим репером Финикова $\left\{\overline{A}_0,\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3\right\}$, построенном на асимптотических касательных поверхности S_L, репер $\left\{\overline{B}_0,\overline{B}_1,\overline{B}_2,\overline{B}_3\right\}$, определяемый формулами:

$$\overline{B}_0=\overline{A}_0,\quad \overline{B}_1=\overline{A}_1+\overline{A}_2,\quad \overline{B}_2=\overline{A}_1-\overline{A}_2,\quad \overline{B}_3=\overline{A}_3. \tag{3.5}$$

Обозначим:

$$\theta^1=\omega^1+\omega^2,\ \theta^2=\omega^1-\omega^2. \tag{3.6}$$

Деривационные формулы репера $\{\overline{B}_0,\overline{B}_1,\overline{B}_2,\overline{B}_3\}$ запишутся в виде:

$$\begin{cases} d\overline{B}_0=-a\theta^1\overline{B}_0+\frac{1}{2}\theta^1\overline{B}_1+\frac{1}{2}\theta^2\overline{B}_2,\\ d\overline{B}_1=(a+b)\theta^1\overline{B}_0+\frac{1}{2}\theta^1\overline{B}_1+\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right)\theta^2\overline{B}_2+\theta^1\overline{B}_3,\\ d\overline{B}_2=(a-b)\theta^2\overline{B}_0+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}\right)\theta^2\overline{B}_1-\frac{1}{2}\theta^1\overline{B}_2-\theta^2\overline{B}_3,\\ d\overline{B}_3=a\theta^1\overline{B}_0+\frac{1}{2}(a+b)\theta^1\overline{B}_1+\frac{1}{2}(b-a)\theta^2\overline{B}_2+a\theta^1\overline{B}_3. \end{cases} \tag{3.7}$$

Из этих формул непосредственно следует

Теорема 3.2. Поверхность S_L, ассоциированная с конгруэнцией L, обладает следующими свойствами:

1) Поверхности (B_1) и (B_2) являются фокальными поверхностями конгруэнции вторых директрис Вильчинского, причем поверхность (B_2) вырождается в линию.

2) Касательные B_0B_i огибают линии $\theta^j=0$, высекаемые на поверхности S_L торсами конгруэнций первых директрис Вильчинского.

3) Линии $\theta^1=0$ являются линиями Δ [2, с.38], т.е. линиями на поверхности S_L, вдоль которых характеристика квадрики Ли распадается на две нераспадающиеся коники.

4) Вдоль линий $\theta^1=0$ и только вдоль них все инварианты поверхности S_L постоянны.

5) Касательные к линиям $\theta^1=0$ на поверхностях S_L и (A_3) пересекаются в фокусе B_2 луча A_1A_2, описывающем линию.

6) Пусть C_1^*, C_2^* - точки на первой директрисе Вильчинского A_0A_3, гармоничные соответствующим фокусам C_1, C_2 луча A_0A_3 относительно A_0 и A_3.Тогда плоскость, проходящая через вторую директрису Вильчинского A_1A_2 и одну из этих точек, является касательной плоскостью к невырожденной фокальной поверхности (B_1), а плоскость, проходящая через A_1A_2 и другую точку, содержит касательную к линии (B_2).

7) Поляра фокуса B_1 (B_2) луча A_1A_2 относительно квадрики Q_m проходит через фокус B_2 (B_1) и первую директрису Вильчинского A_0A_3.

Библиографический список

1. *Фиников С.П.* Проективно-дифференциальная геометрия // М.; Л: ОНТИ, 1937. 264с.

2. *Малаховский В.С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986. 72с.

3. *Малаховский В.С.* Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1977. Вып. 8. С.32-42.

4. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1950. 528с.

V. S. M a l a k h o v s k y

ON ONE CLASS OF CONGRUENCES OF OSCULATING QUADRICS DARBOUX OF A NONRULED SURFACE

A congruence (Q_m) of osculating quadrics Darboux of a smooth nonruled surface S is investigated in a three-dimensional projective space, whose associated quadrics are nondegenerated cones, containing the first directrix Wilczynsci. It is proved that points of intersection of a quadric $Q_m \subset (Q_m)$ with the first directrix Wilczynsci of the surface S are focal points of the quadric Q_m, where the surface S is a double focal surface of the congruence (Q_m). A subclass of the congruences (Q_m) is investigated in detail, defined by a totally integrable system of Pfaffian equations. Quadrics of this subclass envelop a surface of a new type, possessing interesting geometric properties.

УДК 514.75

ОБ n-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Н. В. М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Изучается n-параметрическое семейство H_n аффинных отображений h: $A_n \to a_n$ n-мерных аффинных пространств. Построены поля фундаментальных геометрических объектов первого и второго порядков. Исследованы их подобъекты и охваты. Рассмотрены фокальные многообразия семейства H_n. В случае центроаффинного пространства A_n определена индуцированная семейством H_n инвариантная метрика в A_n, а в пространстве a_n - аффинная связность.

§1. Фундаментальные объекты семейства аффинных отображений

Рассмотрим два n-мерных аффинных пространства A_n, a_n и множество H всевозможных аффинных отображений h: $A_n \to a_n$. Отнесем пространства A_n и a_n к реперам $\left\{A;\vec{E}_I\right\}$, $\left\{a;\vec{e}_i\right\}$ ($i,j,k,I,J,K=\overline{1,n}$). Деривационные формулы этих реперов и структурные уравнения пространств A_n и a_n запишутся в виде [1]: