которое изоморфно либо плоскости Лобачевского Λ_2, если $T=\mathbb{R}$, либо пространству Лобачевского Λ_3, если $T=\mathbb{C}$.

Список литературы

1. Ведерников В.И. Симметрические пространства и сопряженные связности. - Уч.зап.Казанск.ун-та, 1965, № 1, с.7-59.

2. Ведерников В.И. Симметрические пространства, сопряженные связности как нормализованная связность. - Тр. геометрич.семинара, ВИНИТИ АН СССР, 1966, т.1, с.63-88.

3. J. Dieudonne. Les determinants sur un corps non commutatif. SO. Math. France, 1943, 73.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.I5 1984

УДК 514.75

О.С.Редозубова

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПАРЫ T КОНГРУЭНЦИЙ С РАВНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ АБСЦИСС ФОКУСОВ

В работе рассмотрены ортогональные пары T конгруэнции в E_3, у которых равны между собой произведения абсцисс фокусов $\rho_1\rho_2$ и $\rho_1'\rho_2'$.

К паре соответствующих прямых $\{\tau_a\}$ ($a=1,2$) присоединена конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$. Прямые τ пересекают τ_a в точках K_a. Подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec{e}_i)$ ($i=1,2,3$) располагается так, что вершина его лежит на прямой τ конгруэнции $\{\tau\}$, вектор $\vec{e}_3$ параллелен прямой τ. Тогда $K_a(0,0,h_a)$. Фокусы прямых τ_a обозначены буквами F_a, F_a' ($a=1,2$). Направляющие векторы прямых τ_a есть орты $\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a$. Координаты F_a, F_a' в репере $(K_a,\vec{\eta}_a)$ - ρ_a и ρ_a'. Ортогональные пары T конгруэнций, у которых $\rho_1\rho_2=\rho_1'\rho_2'$ обозначены буквой $\bar{T}$. В соответствии с работой ([1], с.3,5) пары T могут быть общими ($\rho=\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2'\neq 0$) и специальными ($\rho=0$).

Теорема 1. Пары $\bar{T}$ конгруэнции в общем случае существуют с произволом четырех функций одного аргумента, (если не равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых). Не существует пар T специального вида.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями ([1], с.2,3). Тогда в общем случае пар $\bar{T}$ конгруэнций уравнения, определяющие такие пары, можно привести к виду $\rho_1=s\rho_1'$, $\rho_2'=s\rho_2$, $\rho\neq 0$, $A_1=A_2\equiv A$, $A=-H_1\frac{\rho_2}{\rho_1'}$,

$$H_2=H_1\frac{(\rho_2)^2}{(\rho_1')^2},\quad Q_1=-\rho_1'\rho_2 s\frac{\Omega_{13}}{h_1-h_2}-H_1(1+s)\rho_2, \tag{1}$$

$$Q_2=-\rho_1'\rho_2 s\,\Omega_{23}\frac{1}{h_1-h_2}-H_1(\rho_2)^2\frac{1}{\rho_1'}(1+s).$$

Дифференцирование внешним образом приводит к системе четырех независимых уравнений, если $\rho_1' \neq -\rho_2$. Неизвестных функций- тоже четыре: $H_1, d\rho_1', d\rho_2, ds$. Можно показать, что система в инволюции и определяет такие пары с произволом четырех функций одного аргумента. Условие $\rho_1' = -\rho_2$ вместе с уравнениями системы (1) дает $\rho_2' = -\rho_1$ и тогда $\rho_1 - \rho_1' = \rho_2 - \rho_2'$, т.е. равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых. В специальном случае, т.е. когда $\rho = \rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' = 0$ и пары удовлетворяют условию $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$, имеем $\rho_1' = -\rho_1$, $\rho_2' = -\rho_2$. Тогда уравнения, определяющие пары, можно записать следующим образом ([2], с.188)

$$\rho_1' = -\rho_1, \quad \rho_2' = -\rho_2, \quad A_1 = A_2 = A, \quad A = H_1 \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1},$$
$$H_2 = H_1 \frac{(\rho_2)^2}{(\rho_1)^2}, \quad Q_1 = -\Omega_{13} \frac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2}, \quad Q_2 = -\Omega_{23} \frac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2}. \tag{2}$$

Дифференцируем первые два уравнения внешним образом и подставим туда значения A, Q_α, H_α $(\alpha = 1, 2)$ из (2). Вычитая из одного другое, получим, учитывая независимость форм Ω_{13} и Ω_{23}: $(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 = -(h_1 - h_2)^2$, чего не может быть. Итак, не существует пар $\bar{T}$ конгруэнций специального вида.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы у пар $\bar{T}$ конгруэнций были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, необходимо и достаточно, чтобы у них были постоянны расстояния между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. К системе (1) присоединим условие равенства фокальных расстояний соответствующих прямых: $\rho_1 - \rho_1' = \rho_2 - \rho_2'$. При подстановке в это равенство $\rho_1 = s\rho_1'$, $\rho_2' = s\rho_2$, $s \neq 1$ из системы (1) получим $\rho_1' = -\rho_2$, $\rho_2' = -\rho_1$ Отсюда следует, что это есть пары II-го типа ([1], с.14). Таким образом, пары $\bar{T}$ конгруэнций с равными фокальными расстояниями соответствующих прямых являются равнонаклонными парами II-го типа и определяются системой уравнений:

$$\rho_1' = -\rho_2, \quad \rho_2' = -\rho_1, \quad A_1 = A_2 \equiv A, \quad A = H_1, \quad H_2 = H_1,$$
$$Q_1 = -\Omega_{13} \frac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2} + H(\rho_1 - \rho_2), \quad Q_2 = -\Omega_{23} \cdot \frac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2} - H_1(\rho_1 - \rho_2). \tag{3}$$

В работе ([1], с.19) показано, что такие пары существуют с произволом трех функций одного аргумента. Из уравнения $H_1 = H_2$ в системе (3) следует, что $h_1 - h_2 = const$, то есть постоянно расстояние между соответствующими прямыми. Обратно, если $h_1 - h_2 = const$, то $H_1 = H_2$ и пары $\bar{T}$ являются парами с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми. Но из работы ([1], с.19) следует, что при условии $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$ у таких пар равны между собой расстояния между соответствующими прямыми, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы пары $\bar{T}$ конгруэнций были парами II-го типа, необходимо и достаточно, чтобы были постоянны расстояния между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если пары $\bar{T}$ конгруэнций II-типа, то $\rho_1' = -\rho_2$, $\rho_2' = -\rho_1$. Умножая эти уравнения на $s-1$, получим, учитывая (1), что $\rho_1 - \rho_1' = \rho_2 - \rho_2'$ и в силу теоремы 2 расстояние между соответствующими прямыми постоянно. Если же $h_1 - h_2 = const$, то в силу теоремы 2 равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых. Тогда из равенств $\rho_1' - \rho_1 = \rho_2' - \rho_2$ и $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$ имеем $\rho_1' = -\rho_2'$, $\rho_2' = -\rho_1$, откуда следует, что пары $\bar{T}$ конгруэнций - II-го типа.

З а м е т и м, что ортогональные пары Т конгруэнций будут иметь нормальные дополнительные конгруэнции тогда и только тогда, когда прямые конгруэнции их общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые в несоответствующих фокусах.

Действительно, условия нормальности конгруэнций $\{F_1F_2\}$ и $\{F_1'F_2'\}$ имеют вид:

$$(h_1 - h_2)^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \rho_1\rho_2 \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$
$$(h_1 - h_2')^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \rho_1'\rho_2' \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \tag{4}$$

Подставляя условие ортогональности $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2' = 0, \tag{5}$$

откуда $\rho_1 = \rho_2' = 0$. Обратное верно.

Т е о р е м а 4. Ортогональные пары $\bar{T}$ конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями существуют с произволом двух функций одного аргумента. Такие пары есть равнонаклонные пары II-типа, у которых постоянно расстояние между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ортогональные пары T конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями есть пары $\bar{T}$, следовательно, они определяются системой уравнений (1), к которой надо присоединить условия (5). Из (5) следует, что $\rho_1 = \rho_2' = 0$ $(S=0)$. Такую систему можно привести к виду $A_1 = A_2 = A$, $A = Q_1 \frac{1}{\rho_1'}$,

$$H_1 = -Q_1 \frac{1}{\rho_2}, \quad H_2 = Q_1 \frac{\rho_2}{(\rho_1')^2}, \quad Q_2 = Q_1 \frac{\rho_2}{\rho_1'}. \tag{6}$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом и подставляя выражения A, H_1, H_2, Q_2 из системы (6), получим четыре квадратичных уравнения. Вычитая из второго квадратичного уравнения третье, получим

$$Q_1 \wedge \left(\Omega_{23} + \Omega_{13} \frac{1}{\rho_1'}\right) \frac{(\rho_1')^2 - (\rho_2)^2}{(k_1 - k_2)(\rho_1')^2 (\rho_2)^2} = 0, \tag{7}$$

откуда следует, что может быть две возможности: а/ $|\rho_1'| = |\rho_2|$ (будем считать, что $\rho_1' = -\rho_2$, ибо случай $\rho_1' = \rho_2$ сводится к предыдущему), и б/ $Q_1 \wedge \left(\Omega_{23} + \Omega_{13} \frac{1}{\rho_1'}\right) = 0$.
Можно показать, что случай б/ приводит к противоречию. В случае а/ система имеет два независимых квадратичных уравнения. Неизвестных функций тоже две: Q_1, $d\rho_2$. Исследование показывает, что произвол существования - две функции одного аргумента. Из условия а/ следует, что $\rho_1' = -\rho_2$. Из условия (5) — $\rho_2' = \rho_1 = 0$. Следовательно, рассматриваемые пары есть равнонаклонные пары 2-го типа ([1], с.14). При $\rho_1' = -\rho_2$ в системе (6) $H_1 = H_2$. Отсюда следует, что расстояние между соответствующими прямыми постоянно. Теорема доказана.

Список литературы

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар T конгруэнций. Деп. ВИНИТИ, 14.07.1980, М., №2993, МII, б/о189
2. Редозубова О.С. Об одном специальном виде пар T конгруэнций. - Уч. зап. МГПИ им. В.И. Ленина, М., 1963.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I5 1984

УДК 514.75

А.В. С т о л я р о в

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННОМ ГИПЕРПОЛОСНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Двойственные проективные связности, индуцируемые оснащением в смысле Э. Картана [8] регулярной m-мерной гиперполосы H_m в пространстве проективной связности $P_{n,n}$ (в проективном пространстве P_n), автором изучались в работах [5], [6].

В настоящей работе освещаются некоторые вопросы двойственной теории гиперполосного распределения [3] m-мерных линейных элементов $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ ($m < n-1$), оснащенного в смысле Э. Картана. На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения $\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = \overline{1,n}$; $i,j,k,\ell,s,t = \overline{1,m}$; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = \overline{0,m}$; $u, v, w = \overline{m+1, n-1}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}$.

1. В n-мерном пространстве проективной связности $P_{n,n}$ рассмотрим регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов $\mathcal{H}$ [3]; в репере первого порядка $\{A_0, A_\mathcal{J}\}$ дифференциальные уравнения многообразия $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ имеют вид:

$$\omega_i^n = \Lambda_{i\mathcal{K}}^n \omega_0^\mathcal{K}, \quad \omega_i^v = M_{i\mathcal{K}}^v \omega_0^\mathcal{K}, \quad \omega_v^n = A_{v\alpha}^n \omega_0^\alpha, \quad \omega_v^i = N_{v\mathcal{K}}^i \omega_0^\mathcal{K}. \tag{1}$$

Пусть распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ оснащено в смысле Э. Картана [8] полями геометрических объектов $\{\nu_v^0\}, \{\nu_n^i, \nu_n^0, a_n^v\}$:

$$\begin{gathered} \nabla_d \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{n\mathcal{K}}^i \omega_0^\mathcal{K}, \\ \nabla_d \nu_v^0 + \omega_v^0 = \nu_{v\mathcal{K}}^0 \omega_0^\mathcal{K}, \\ \nabla_d \nu_n^0 + \nu_n^j \omega_j^0 + a_n^u \omega_u^0 + \omega_n^0 = \nu_{n\mathcal{K}}^0 \omega_0^\mathcal{K}, \end{gathered} \tag{2}$$

где квазитензор $a_n^v = \frac{1}{m} \Lambda_n^{ij} M_{ji}^v$. Точки $N_u = \nu_u^0 A_0 + A_u$, $N_n = \nu_n^0 A_0 + \nu_n^j A_j + a_n^v A_v + A_n$ определяют поле оснащающих плоскостей $N_{n-m-1}(A_0) \equiv [N_n N_v]$ и прямая $h(\nu) \equiv [A_0 N_n]$