Список литературы

1. Косаренко М.Ф. Построение внутренних инвариантных точечного и тангенциального реперов регулярной гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_N$ –В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,вып.13,1982,с.38-44.

2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.– Тр.Моск.матем.о -ва,1953, т.2,с.275-382.

3. Лаптев Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства.-Тр.4-го Всес.матем.съезда,1961,т.2.-М.: Наука,1964,с.226-233.

4. Лаптев Г.Ф.,Остиану Н.М.Распределения $m$-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I.-Тр.Геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР,1971,т.3, с.49-94.

5. Cartan E. Les espaces á connexion projective. Тр.семинара по векторн. и тензорн.анализу,1937,т.4, с.147-159.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.15 1984

УДК 514.75



М.В.Кретов


## О СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОДКЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ,АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПЛЕКСАМИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРКВАДРИК.

В работе продолжается изучение локальных дифференцируемых отображений $f$ ,ассоциированных с комплексами $\mathcal{K}_n$ центральных невырожденных гиперквадрик $q$ в аффинном пространстве, [1]-[3].Строится дифференциальная геометрия отображений,порожденных,так называемыми,основными гиперплоскостями,при этом используются понятия и обозначения,введенные в работе [1].

Пусть $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma} \overset{def}{=} \Lambda_{\alpha(\beta\gamma)}$, $(\alpha,\beta,\dots=\overline{1,n})$ ,где $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ -компоненты фундаментального объекта первого порядка, [4], комплекса $\mathcal{K}_n$ в частично канонизированном репере $R_0$ [1],а круглые скобки обозначают симметрирование.В репере $R_0$ уравнение гиперквадрики $q$ имеет вид:

$$a_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}-1=0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) \neq 0. \tag{1}$$

Рассмотрим систему величин

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=2a^{\alpha\delta}\tilde{\Lambda}_{\delta\beta\gamma}. \tag{2}$$

Объект $\overline{\Gamma}=\{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$ является аналогом объекта связности Врэнчану для отображения $\varphi_1(\varphi_2)$ [1],[5].

Выделим во множестве касательных к отображению $\varphi_1$ дробнолинейных отображений $K_{\varphi_1}(P_\alpha)$ одно отображение $K(B_\alpha)$,определяемое равенством

$$B_\alpha=\frac{1}{n+1}\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}. \tag{3}$$

Оно характеризуется более тесным сближением с отображением $\varphi_1$ в том смысле, что в точке $C$ (центре гиперквадрики $q$) выполняется равенство:

$$dJ(K(B_\alpha)) = dJ(\varphi_1), \qquad (4)$$

где $J(K(B_\alpha))$ и $J(\varphi_1)$. соответственно. якобианы отображений $K(B_\alpha)$ и $\varphi_1$ в точке $C$, [6].

О п р е д е л е н и е 1. Касательные к $\varphi_1$ и $\varphi_2$ дробнолинейные отображения, определяемые тензором $B_\alpha$, будем называть основными касательными дробнолинейными отображениями, [7], а гиперплоскость (3.8), (3.9), [1], определяющую эти отображения, - $\varphi$ - основной гиперплоскостью $\Pi_\varphi$.

Введем систему величин

$$g_{\alpha\beta} = a^{\delta\gamma} a^{\varepsilon\eta} \Lambda_{\delta\xi\alpha} \Lambda_{\gamma\eta\beta}. \qquad (5)$$

Пусть $g^{\alpha\beta}$ -тензор, взаимный тензору $g_{\alpha\beta}$. Рассмотрим тензор

$$V^{\alpha\beta\gamma} = a^{\alpha\eta} a^{\beta\varepsilon} \Lambda_{\eta\xi\delta}\, g^{\delta\gamma}. \qquad (6)$$

Имеем $V^{\alpha\beta\xi} \Lambda_{\alpha\beta\eta} = \delta^{\xi}_{\eta}$. Пусть

$$G^{\alpha}_{\beta\gamma} = V^{\varepsilon\zeta\alpha} \Lambda_{\varepsilon\zeta\beta\gamma} \quad \text{и} \quad G_\alpha = G^{\beta}_{\alpha\beta}, \qquad (7)$$

где $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$ -компоненты фундаментального объекта второго порядка [4] комплекса $\mathcal{K}_n$. Гиперплоскость $\Pi_\psi$, заданная уравнением $G_\alpha X^\alpha = n+1$, является аналогом $\varphi$-основной гиперплоскости для отображения $\psi$, [1]. Будем называть ее $\psi$-основной гиперплоскостью.

В работе [2] построена геометрия дифференцируемых отображений $f_1$ и $f_2$, для которых отображение $f$ обладает в точке $C$ соответственно следующими свойствами:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\Lambda_{\alpha\beta(\gamma} T_{\delta)}, \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha(\beta\gamma)}, \qquad (8)$$

где $T_\alpha$ -некоторый тензор.

В настоящей работе рассмотрим случай, когда при отображении $f$ имеет место:



$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\beta} S_\gamma, \qquad (9)$$

где $S_\alpha$ - некоторый тензор. Отображение $f$, обладающее в точке $C$ указанным свойством, будем называть отображением $f_3$. В этом случае система уравнений, определяющая индикатрису $J_\varphi$ [1] отображения $\varphi$, имеет вид:

$$a_{\alpha\beta} X^\beta (S_\gamma X^\gamma - 1) = 0, \qquad (10)$$

откуда следует, что индикатриса $J_\varphi$ отображения $\varphi$ состоит из точки $C$ и гиперплоскости $H_\varphi(S_\alpha)$, определяемой уравнением $S_\alpha X^\alpha - 1 = 0$. Любое направление в точке $C$ при отображении $f_3$ является $\varphi$-характеристическим, [1]. Для отображения $f_3$ имеют место:

П р е д л о ж е н и е 1. Конус $K_\varphi(0)$-главных прямых вырождается в гиперплоскость, параллельную гиперплоскости $H_\varphi(S_\alpha)$, инцидентную точке $C$.

П р е д л о ж е н и е 2. Любое $\psi$-характеристическое направление является $f$-характеристическим направлением.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $f$ назовем отображением $f_4$, если основные гиперплоскости $\Pi_\varphi$ и $\Pi_\psi$ параллельны, -отображением $f_5$, если $\psi$-основная гиперплоскость $\Pi_\psi$ параллельна диаметральной гиперплоскости $P$, [8] и -отображением $f_6$, если параллельны $\Pi_\varphi$ и $P$.

П р е д л о ж е н и е 3. Если отображение $f$ является отображением $f_2$ или $f_3$, то оно является отображением $f_6$.

П р е д л о ж е н и е 4. Для отображения $f_1$ гиперплоскости $\Pi_\psi$ и $H_\psi(T_\alpha)$ параллельны; для отображения $f_3$ параллельны между собой гиперплоскости $\Pi_\varphi$, $H_\varphi(S_\alpha)$ и $P$.

О п р е д е л е н и е 3. Отображением $f_{\alpha_1,\alpha_2 \dots \alpha_\varkappa}$ ($\varkappa = \overline{1,6}$; $\alpha_1,\alpha_2 \dots = \overline{1,6}$; $\alpha_1 < \dots < \alpha_\varkappa$) назовем отображение $f$, если оно одновременно является отображениями $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_\varkappa}$.

В общем случае существуют 63 класса отображений

$f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\varkappa}$. Для отображения $f_{13}$ имеют место следующие предложения.

П р е д л о ж е н и е 5. Если тензоры $T_\alpha$ и $S_\alpha$ совпадают, то все основные гиперплоскости и гиперплоскости, определяемые этими тензорами, параллельны диаметральной гиперплоскости.

П р е д л о ж е н и е 6. Конус асимптотических направлений [3] вырождается в две гиперплоскости, инцидентные точке $C$, одна из которых параллельна гиперплоскости $H_\varphi(S_\alpha)$.

З а м е ч а н и е. При совпадении тензоров $S_\alpha$ и $T_\alpha$ отображение $f_{13}$ является отображением $f_{13456}$.

Рассмотрим теперь некоторые свойства отображений $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\varkappa}$, $\varphi$ и $\psi$ ассоциированных с комплексами $K_3^0$ и $K_3^{01}$ [9].

П р е д л о ж е н и е 7. Существует не более семи классов отображений $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\varkappa}$, ассоциированных с комплексами $K_3^0$ и не более трех указанных классов отображений, ассоциированных с комплексами $K_3^{01}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для отображения $f_1$ должно быть

$$\Lambda_{IJKL}=2\Lambda_{IJ(K}T_{L)}, \quad I,J,\ldots=\overline{1,3} \tag{11}$$

В частности, для комплекса $K_3^0$ из условия (11) при $I=J=K=L=1$ следует, что $T_1=3$, а при $I=K=1$, $J=L=2$ получаем $T_1=2$. Приходим к противоречию с условием (11). Так как для отображения $f_2$ имеет место

$$\Lambda_{IJK}=\Lambda_{I(JK)}, \tag{12}$$

то в нашем случае (12) равносильно системе уравнений:

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0,\ 1-b-b\lambda=0,\ (\lambda+1)(1-b\lambda)=0, \tag{13}$$

откуда следует, что класс отображений $f_2$ не пересекается с классом отображений, ассоциированным с комплексом $K_3^0$.

Аналогичное рассуждение можно провести для отображения $f_3$. Первая часть предложения доказана.



Второе утверждение предложения вытекает из определений отображений $f_1, f_2, f_3$ и $f_6$ и геометрических свойств комплекса $K_3^{01}$, а также из того, что уравнения диаметральной, $\varphi$-основной и $\psi$-основной гиперплоскостей для комплекса $K_3^{01}$ соответственно имеют вид:

$$X^1+X^2+X^3=0, \tag{14}$$

$$4X^1+(5-b)X^2+5X^3-4=0. \tag{15}$$

и

$$\begin{gathered}(9\beta^4+5b^2\beta^2-10b\beta^2+30\beta^2+6b^2-12b+24)X^1+\\+(5\beta^4-b\beta^4+5b^2\beta^2-9b\beta^2+24\beta^2+12b^2-24b+32)X^2+\\+(5\beta^4+b^2\beta^2-10b\beta^2+Bb\beta^2-B\beta^2+24\beta^2+8b^2-20b+2bB-\\-2B+32)X^3=4(\beta^2+2)(\beta^2+b^2-2b+4),\end{gathered} \tag{16}$$

где коэффициент $B$ удовлетворяет уравнению: $db=2b\omega^2+B\omega^3$.
Для комплекса $K_3^{01}$ уравнения индикатрис $J_\varphi$ отображения $\varphi$ и $J_\psi$ отображения $\psi$ [1] соответственно имеют вид:

$$\begin{gathered}2(X^1)^2-2\beta X^2X^3-X^1=0,\\-\beta X^1X^3+2(X^2)^2+X^2X^3+(1-b)(X^3)^2-X^2=0,\\-\beta X^1X^2+(X^2)^2+(1-b)X^2X^3+2(X^3)^2-X^3=0\end{gathered} \tag{17}$$

и

$$\begin{gathered}3(X^1)^2-2\beta X^2X^3-2X^1=0,\\X^3(2X^1+2X^2+X^3-1)=0,\\-(X^2)^2-2X^1X^2-2X^2X^3+b(X^3)^2+X^2=0,\\3X^2+2X^2X^3+(\beta^2-2b+1)(X^3)^2-2X^2=0,\\4(X^2)^2+2(\beta^2-3b+2)X^2X^3+(4-3b-B)(X^3)^2-2X^2+2(b-1)X^3=0,\\(\beta^2+1)(X^2)^2+2(1-b)X^2X^3+(b^2-b+3)(X^3)^2-4X^3=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Анализируя уравнения (17) и (18) получаем

П р е д л о ж е н и е 8. Индикатриса $J_\varphi$ отображения $\varphi$ делит отрезок, соединяющий фокальную точку $A_1$ и центр квадрики $q$ пополам, а индикатриса $J_\psi$ отображения $\psi$ делит этот отрезок в отношении 1:2.

Список литературы

I.Кретов М.В.Дифференцируемые отображения,ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.-Калининград,I98I (рукопись депонирована в ВИНИТИ 22 июня I98Iг.,№3003-8I Деп.).

2.Кретов М.В.О некоторых подклассах дифференцируемого отображения,ассоциированного с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.-Калининград,I982 (рукопись депонирована в ВИНИТИ 3I мая I982г.,№ 2657-82 Деп.).

3.Кретов М.В. Об асимптотических направлениях комплексов гиперквадрик в аффинном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, I983,Вып.I4,с.36-40.

4.Лаптев Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.о-ва,I953,2,с.275-382.

5.Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.Геометрия,I963,I965,с.65-I07 .

6.Андреев Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,I974,Вып.5 с.6-24.

7.Андреев Б.А.О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,I973,Вып.3,I973,с.6-I9.

8.Кретов М.В.О связностях,ассоциированных с комплексом центральных гиперквадрик в аффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,I98I,Вып.I2,с.35-39.

9.Кретов М.В.О некоторых подклассах комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве-Калининград,I98I(рукопись депонирована в ВИНИТИ I7 ноября I98I,№5272-8I Деп.).





УДК 5I4.75

В.С.Малаховский

## О МНОГООБРАЗИЯХ ФИГУР В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В $n$-мерном однородном пространстве рассматривается многообразие фигур,порождающее с помощью фундаментального объекта порядка $k$ многообразие индуцированных фигур.Подробно исследуются конгруэнции линейчатых квадрик с индуцированным многообразием распавшихся фокальных коник.

Пусть $E_n$ - $n$-мерное однородное пространство с фундаментальной $r$-членной группой Ли $G$ ,определяемой инвариантными формами $\theta^s(u, du)$ и структурными постоянными $C^s_{pq}$ $(p,q,s=1,2,\ldots,r)$. $m$-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур $\mathcal{F}$ ранга $N$ определяется пфаффовыми уравнениями

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i, \quad (i,j,k=1,\ldots,m), \qquad (1)$$

где $\Omega^{\mathcal{J}} \equiv da^{\mathcal{J}} - f^{\mathcal{J}}_s(a)\,\theta^s(u,du)$ -структурные формы фигуры $\mathcal{F}$. Осуществляя последовательные продолжения системы (1), получим внутренние фундаментальные объекты многообразия $\mathfrak{M}_m$ различных порядков

$$\Gamma_1 = \{a^{\mathcal{J}}, \lambda^a_i\}, \ldots, \Gamma_\nu = \{a^{\mathcal{J}}, \lambda^a_i, \ldots, \lambda^a_{i_1\ldots i_\nu}\}. \qquad (2)$$

Определение. Фигура $\Phi$ пространства $E_n$ называется $k$-индуцированной фигурой по отношению к фигуре $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}_m$, если геометрический объект фигуры $\Phi$ охватывается фундаментальным объектом $\Gamma_k$ порядка $k$ многообразия $\mathfrak{M}_m$.

При $k=0$ получаем просто индуцированную фигуру,по отношению к которой $\mathcal{F}$ является индуцирующей фигурой [1]. При $k\geqslant 1$ многообразие $\mathfrak{M}$ простых фигур целесообразно