(n-m-1>2) голономного χ- расслоения , имеет нулевое кручение и является двойственным пространству $\overset{1}{P}_{n,n-m-1}$.

Список литературы

1. *Волкова С. Ю.* $\hat{H}$ (Λ,L)- распределения проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1991. № 22. С.23-25.
2. *Волкова С. Ю.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\hat{H}$ (Λ,L)-распределением // Там же, 1992. № 23.С.15-23.
3. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1992. 290 с.
4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m- мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ.М., 1971.Т.3.С.49-94.
5. *Волкова С. Ю* Двойственные проективные связности S-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. № 31.С.17-24.
6. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ.М., 1973. Т.4. С.7-70.

S.Yu. Volkova

ON DUAL PROJECTIVE CONNECTION OF S-DISTRIBYTION

The projective linear connections $\overset{1}{\nu}$, $\overset{2}{\nu}$, $\overset{3}{\nu}$ of equipped χ-bundle, associated with S-distribution in projective space, are constructed. Scopes for these connections curvature – torsion tensors are obtained. Coinsidence conditions of these connections and duality for the projective connection spaces $\overset{1}{P}_{n,n-m-1}$, $\overset{2}{P}_{n,n-m-1}$ are found. Their geometrical interpretation is given. It is shown, that equipment of holonomic χ-bundle in Cartan's sense induces the space $\overset{2}{P}_{n,n-m-1}$ with vanishing curvature, which is dual to $\overset{1}{P}_{n,n-m-1}$.

УДК 514.75

О.С. Голышева

(Алтайский государственный университет)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДВАЖДЫ КАНАЛОВЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^n

Рассмотрена дважды каналовая гиперповерхность M^{n-1} в евклидовом пространстве E^n – огибающая однопараметрического и (n-2) – параметрического семейств гиперсфер. Центры гиперсфер описывают кривую (C_1) и (n-2)- поверхность (C_2). Гиперповерхность M^{n-1} имеет две главные кривизны: k_1 кратности n-2 и k_2 кратности 1. Определены два инволютивных распределения: $\Delta(p)=\{X_p\in T_p M^{n-1}: AX_p=k_1X_p\}$ и $\Delta^{\perp}(p)=\{X_p\in T_pM^{n-1}: AX_p=k_2X_p\}$, $p\in M^{n-1}$.

Обозначим $\nabla_V V=-bU$ где U-орт, $U\perp V$. Доказано, что интегральная кривая (γ) векторного поля U – окружность $\overline{S}^1$.Нормали гиперповерхности M^{n-1} вдоль $\overline{S}^1$ проходят через неподвижную точку C_1, образуя круговой конус. Точка C_2 опишет кривую ($\overline{C}$) на этом конусе. Линия ($\overline{C}$)есть кривая второго порядка. Эксцентриситеты кривых второго порядка (C_1) и ($\overline{C}$) связаны соотношением $\varepsilon\overline{\varepsilon}=1$.

Рассмотрим дважды каналовую гиперповерхность M^{n-1} в евклидовом пространстве E^n – огибающую однопараметрического и (n-2) – параметрического семейства гиперсфер. Центры гиперсфер описывают кривую (C_1) и (n-2)-поверхность (C_2). Обозначим $F(M^{n-1})$ – R- алгебру дифференцируемых на M^{n-1} функций, T_s^q – F- модуль дифференцируемых на M^{n-1} тензорных полей типа (q,s), $\chi(M^{n-1})$ – алгебру Ли векторных полей на M^{n-1}, ∂-дифференцирование и <,>- скалярное произведение в E^n. Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M^{n-1} имеют вид [1]

$$\partial_x Y=\nabla_x Y+b(X,Y)n,\ \ \partial_x n=-AX, \tag{1}$$

где $A\in T_1^1(M^{n-1})$, $X,Y\in\chi(M^{n-1})$, $b\in T_2^0(M^{n-1})$, $b(X,Y)$ – вторая фундаментальная форма A – оператор Вейнгартена, ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y)=\langle X,Y\rangle$. Гиперповерхность M^{n-1} меет две главные кривизны: k_1 кратности n-2 и k_2 кратности 1.

Определены два инволютивных распределения: Δ, $\Delta^{\perp}$, где

$$\Delta(p)=\{X_p\in T_p M^{n-1}: AX_p=k_1X_p\}$$

и ортогональное ему

$$\Delta^{\perp}(p)=\{X_p\in T_pM^{n-1}: AX_p=k_2X_p\},\ p\in M^{n-1},$$

причем

$$Xk_1=0,\ X\in\Delta,\ Yk_2=0,\ Y\in\Delta^{\perp}.$$

Положим $V\in\Delta^{\perp}$,$\langle V,V\rangle=1$. Тогда получим [3]

$$\nabla_x V=-aX,(\nabla_V X)^{\perp}=\varepsilon(X)V,\ X\in\Delta, \qquad (2)$$

$$\varepsilon(X)=\frac{Xk_2}{k_1-k_2},\ a=\frac{Vk_1}{k_1-k_2},\ Xk_1=0,\ Vk_2=0,\ X\in\Delta. \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$\nabla_V V=-bU \qquad (4)$$

где U – орт, $U\perp V$, имеем [3]

$$b=\varepsilon(U),\ \varepsilon(X)=0,\ Xk_2=0,\ X\perp U,V. \qquad (5)$$

При $ab\neq 0$ [3]

$$-Ub+Va-a^2-b^2=k_1k_2, \qquad (6)$$

$$\nabla_U U=aV, \qquad (7)$$

причем, функции a, b, k_1, k_2 удовлетворяют соотношениям [3]:

$$Xk_1=0,\ Uk_1=0,\ Vk_1=a(k_1-k_2)$$
$$Vk_2=0,\ Uk_2=b(k_1-k_2) \qquad (8)$$
$$Xa=0, Ua=0,\ Xb=0,\ X\perp U,V,$$
$$(UUb)=-b(a^2+b^2+3Ub+k_1^2) \qquad (9)$$

Интегральной поверхностью распределения Δ является (n-2)-сфера S^{n-2}, а интегральной кривой распределения $\Delta^{\perp}$ является окружность S^1. Нормали вдоль S^{n-2} проходят через неподвижную точку $C_1= r+\frac{1}{k_1}n$, где r- радиус–вектор точки $p\in M^{n-1}$. Точка $C_2= r+\frac{1}{k_2}n$ опишет при этом (n-2) – поверхность (C_2), которая при $ab\neq 0$ принадлежит гиперконусу и гиперплоскости [3]. Нормали вдоль S^1 проходят через неподвижную точку C_2 и образуют круговой конус, где $\Pi_2(S^1)=\{V,-bU+k_2n\}$ – плоскость, содержащая S^1. Точка C_1 опишет кривую (C_1) принадлежащую этому конусу и 2–плоскости $\Pi_2(C_1)=\{t,T\}$, где $t=k_1V-an$ – касательный вектор к линии (C_1), $T=k_1U+(\frac{Ub}{b}+b)n$.

Рассмотрим интегральную кривую (γ) векторного поля U,$U\in\Delta U\perp V$.

Теорема 1. *Интегральная кривая (γ) векторного поля U – окружность $\overline{S}^1$ принадлежащая S^{n-2}.*

Доказательство. Исследуем соприкасающуюся плоскость линии (γ). Имеем в силу (1), (7) и равенства $b(U,U)=g(AU,U)=k_1$

$$\partial_U U=aV+k_1n. \qquad (11)$$

Так как в силу (1), (2), (8) $\partial_U(\partial_U U)= -(a^2+k_1^2)U$, то соприкасающаяся 2-плоскость $\Pi_2(\gamma)$ к линии (γ) постоянна. Интегральная кривая (γ)-плоская кривая, принадлежащая S^{n-2}, следовательно, (γ) – окружность $\bar{S}^1$, причем $\Pi_2(\bar{S}^1)=\{U,aV+k_1n\}$.

Из равенства $\partial_U C_1=0$ следует, что нормали гиперповерхности M^{n-1} вдоль интегральной кривой $\bar{S}^1$векторного поля U проходят через неподвижную точку C_1. Таким образом, нормали вдоль $\bar{S}^1$образуют круговой конус. Точка C_2 опишет кривую ($\bar{C}$) на этом конусе.

Теорема 2. *Линия (*$\bar{C}$*) есть кривая второго порядка.*

Доказательство. Исследуем соприкасающуюся плоскость линии ($\bar{C}$). Имеем

$$\partial_U C_2=\partial_U r-\frac{Uk_2}{k_2^2}n-\frac{k_1}{k_2}U=\frac{k_2-k_1}{k_2}U-\frac{Uk_2}{k_2^2}n=\frac{k_2-k_1}{k_2^2}\bar{t},$$

где $\bar{t}=k_2U+bn$ – касательный вектор линии ($\bar{C}$). В силу (1), (7), (8) и (9)

$$\partial_U \bar{t}=(Uk_2)U+k_2(aV+k_1n)+(Ub)n-bk_1U= -$$

$$bk_2U+k_2(aV+k_1n)+(Ub)n=\Box+k_2\Box,$$

где $\bar{T}= -(\frac{Ub}{b}+b)U+aV+k_1n$, $\partial_U \bar{T}=-(\frac{Ub}{b}+b)\bar{T}$. Соприкасающаяся 2-плоскость $\bar{\Pi}_2(\bar{C})=\{\bar{t},\bar{T}\}$ к линии ($\bar{C}$) постоянна и ($\bar{C}$) есть кривая второго порядка.

Следствие 1. 2–плоскости, содержащие кривые (C_1) и ($\bar{C}$) принадлежат 3-пространству $E_3=\{U,V,n\}$ и ортогональны.

Доказательство. 2-плоскости $\Pi_2(\bar{C})$ и $\Pi_2(C_1)$ принадлежат 3-пространству $\Pi_2(\bar{C})\cup\Pi_2(C_1)=\{U,V,n\}$. Определим в E^3 векторы нормалей $N_{\Pi_2(\bar{C})}$ и $N_{\Pi_2(C_1)}$ к 2- плоскостям $\Pi_2(\bar{C})$ и $\Pi_2(C_1)$ соответственно

$$N_{\Pi_2(\bar{C})}= -bU-(\frac{Va}{a}-a)V+k_2n, \tag{12}$$

$$N_{\Pi_2(C_1)}= -aV+(\frac{Ub}{b}+b)U-k_1n. \tag{13}$$

Используя (6) получим, что ($N_{\Pi_2(\bar{C})}, N_{\Pi_2(C_1)}$).

Для кривой второго порядка (C_1) определим эксцентриситет

$$\varepsilon=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{14}$$

где α – угол между плоскостями $\Pi_2(S^1)$ и $\Pi_2(C_1)$, а β – угол между образующей кругового конуса и плоскостью основания конуса $\Pi_2(S^1)$ [4].

Для кривой второго порядка ($\overline{C}$)определим эксцентриситет

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sin\overline{\alpha}}{\sin\overline{\beta}}, \tag{15}$$

где $\overline{\alpha}$ – угол между плоскостями $\Pi_2(\overline{S}^1)$ и $\Pi_2(\overline{C})$, а $\overline{\beta}$ – угол между образующей кругового конуса и плоскостью основания конуса $\Pi_2(\overline{S}^1)$ [4].

Теорема 3. *Эксцентриситеты кривых второго порядка (C_1) и ($\overline{C}$) связаны соотношением $\varepsilon\overline{\varepsilon}=1$.*

Доказательство. Определим эксцентриситет ε для (C_1). Найдем
$\sin\beta=\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\frac{\langle N_{\Pi_2(C_1)},n\rangle}{\left|N_{\Pi_2(C_1)}\right|}$, отсюда в силу (13)

$$\sin\beta==\frac{b}{\sqrt{k_1^2+b^2}}. \tag{16}$$

Так как $\cos\alpha=\frac{\langle N_{\Pi_2(S^1)},N_{\Pi_2(C_1)},\rangle}{\left|N_{\Pi_2(S^1)}\right|}$, то

$$\cos\alpha=\frac{k_2(\frac{Ub}{b}+b)-bk_1}{\sqrt{(k_2^2+b^2)(a^2+k_1^2+(\frac{Ub}{b}+b)^2)}}.$$

Из (14),(16)

$$\varepsilon=\frac{\sqrt[a]{b^2+k_2^2+(\frac{Va}{a}-a)^2}}{\sqrt[b]{a^2+k_1^2+(\frac{Ub}{b}+b)^2}} \tag{17}$$

Аналогично определим эксцентриситет $\overline{\varepsilon}$ для ($\overline{C}$). Найдем
$\sin(\overline{\beta})=\cos(\frac{\pi}{2}-\overline{\beta})=\frac{\langle N_{\Pi_2(\overline{C}_1)},n\rangle}{\left|N_{\Pi_2(\overline{C}_1)}\right|}$, отсюда в силу (12)

$$\sin(\overline{\beta})=\frac{a}{\sqrt{k_1^2+a^2}}. \tag{18}$$

Так как $\cos\overline{\alpha} = \dfrac{\langle N_{\Pi_2(\overline{S})}, N_{\Pi_2(\overline{C}),} \rangle}{\left| N_{\Pi_2(\overline{S}^1)} \right|}$, то

$$\cos\overline{\alpha} = \frac{k_1(\frac{Va}{a} - a) + ak_2}{\sqrt{(k_1^2 + a^2)(b^2 + k_2^2 + (\frac{Va}{a} - a)^2)}}.$$

Откуда из (15) и (19)

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sqrt[b]{a^2 + k_1^2 + (\frac{Ub}{b} + b)^2}}{\sqrt[a]{b^2 + k_2^2 + (\frac{Va}{a} - a)^2}}\overline{\varepsilon}. \qquad (19)$$

Из (18) и (21) следует утверждение теоремы.

Для кривых второго порядка (C_1) и ($\overline{C}$) определим директрисы конических сечений как прямые пересечения 2-плоскостей, содержащих конические сечения и плоскостей, содержащих направляющие окружности круговых конусов[4].

Теорема 4. *Направляющий вектор директрисы (d) конического сечения (C_1) параллелен вектору нормали $N_{\Pi_2(\overline{C})}$ к 2- плоскости $\Pi_2(\overline{C})$, а направляющий вектор директрисы ($\overline{d}$) конического сечения ($\overline{C}$)параллелен вектору нормали $N_{\Pi_2(C_1)}$ к 2- плоскости $\Pi_2(C_1)$.*

Доказательство. Определим направляющий вектор директрисы (d) конического сечения (C_1), расположенного на 2-конусе с вершиной в точке (C_2) и осью $\overline{t}=k_2U+bn$. В силу (13) $d=bU+(\frac{Va}{a} - a)V-k_2n$. Определим направляющий вектор директрисы ($\overline{d}$) конического сечения ($\overline{C}$), расположенного на 2-конусе с вершиной в точке (C_1) и осью $t=k_1V-an$. В силу (12)

$$\overline{d} = -aV+(\frac{Ub}{b} + b)U-k_1n.$$

Список литературы

1. *Лумисте Ю.Г.* Конструкция Кэли-Каталана для некоторых гиперповехностей Дюпена // Уч.зап.Тартусского университета. 1986. С.36-49.

2. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия. ГИФМЛ, 1963. 540 с.

3. *Чешкова М. А.* Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве E^n // Мат.сб. 2000. Т.191. № 6. С.155-160.
4. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. М.: Просвещение, 1986. Ч.2. 336 с.

S. Golysheva

SOME PROPERTIES OF TWICE CANAL HYPERSURFACES IN THE EUCLIDEAN SPACE E^n

Twice canal hypersurfaces M^{n-1} in the Euclidean space E^n envelope to one-parametr and (n-2)-parametr families of hyperspheres.

УДК 514.76

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный педагогический университет)

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ ОДУЛЬ

Наличие внешней операции на одуле (обобщении модуля) позволяет определить дифференцирование одулярных функций, как обобщение дифференцирования векторных функций. Возникает дифференциальная одулярная (нелинейная) геометрия с касательным отображением в одуль. Оказывается, не для всякого одуля одулярные функции дифференцируемы. В заметке приведен пример такого одуля.

Одуль определяется на алгебраической структуре с внутренней бинарной операцией посредством введения внешней операции. В частности, одуль может быть модулем и линейным пространством. Одули введены Л.В. Сабининым [1], в 1977 году в общем случае они определены на квазигруппах.

Операции на линейном пространстве **L** над полем **F** позволяют ввести дифференцирование векторных функций. Внутренняя операция используется для нахождения приращения $\Delta\vec{r}$ функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, с использованием внешней операции находится отношение приращения функции к приращению аргумента h: $\frac{1}{h}\Delta\vec{r}$. Аналогично определяется производная одулярной функции, далее строится дифференциальная геометрия одулярных пространств. Начала одулярной дифференциальной геометрии заложены в [2-5].