УДК 514.75

Ю. И. Попов

(Российский государственный университет им. И. Канта)

НОРМАЛИЗАЦИЯ ТРЕНСОНА ГИПЕРПОЛОСЫ $H_m(\Lambda)$

Рассматриваются касательно r-оснащенные гиперполосы $H_m(\Lambda)$ аффинного пространства A_n. Внутренним инвариантным образом к гиперполосе $H_m(\Lambda)$ и ее Λ-, L-подрасслоениям присоединяются нормализации Тренсона [2]. Выяснены аналитические признаки эквиаффинности связности $\hat{\gamma}$, индуцируемой полем нормалей Тренсона $T_{n-m}(A)$, а также условие совпадения нормализации Тренсона и Бляшке [4].

Во всей работе придерживаемся следующей схемы индексов: $J, K = \overline{1, n}$; $i, j, k, h, l = \overline{1, m}$; $p, q, r, s, t = \overline{1, r}$; $a, b, c, d = \overline{r+1, m}$; $\alpha, \beta = \overline{m+1, n-1}$; $\overline{\alpha} = (\alpha, n)$; $S = m - r$.

1. В n-мерном аффинном пространстве A_n рассмотрим регулярную гиперполосу H_m, оснащенную полем r-мерных касательных плоскостей Λ (r<m<n–1). Такие гиперполосы обозначим $H_m(\Lambda)$ [4]. Поле Λ-плоскостей порождает сопряженное ему поле касательных S-мерных плоскостей L относительно асимптотического пучка тензоров $b_{ij}^{\hat{\alpha}}$ базисной поверхности V_m гиперполосы $H_m(\Lambda)$. Известно [1], что необходимым и достаточным условием сопряженности плоскостей $\Lambda(A)$, $L(A)$ является обращение в нуль тензора $\left\{b_{pa}^{\hat{\alpha}}\right\}$, т. е.

$$b^{\hat{\alpha}}_{pa} = 0. \qquad (1)$$

Присоединим подвижной репер $R = \{M, \vec{e}_J\}$ аффинного пространства A_n к гиперполосе в текущей точке $A \in V_m$ следующим образом:

$$M \equiv A,\ \{\vec{e}_p\} \subset \Lambda(A),\ \{\vec{e}_a\} \subset L(A),\ \{\vec{e}_\alpha\} \subset X_{n-m-1}(A),$$

где $X_{n-m-1}(A)$ — характеристика гиперполосы $H_m(\Lambda)$. Канонизированный таким образом репер R назовем репером 1-го порядка R^1, относительно которого гиперполоса $H_m(\Lambda)$ задается уравнениями (учитываем уравнения (1)).

$$\omega^n = 0,\ \omega^\alpha = 0,\ \omega^n_\alpha = 0,$$

$$\omega^n_p = b^n_{pq}\omega^q,\ \omega^n_a = b^n_{ab}\omega^b,\ \omega^\alpha_p = b^\alpha_{pq}\omega^q,\ \omega^\alpha_a = b^\alpha_{ab}\omega^b,$$

$$\omega^\alpha_p = \lambda^\alpha_{pi}\omega^i,\ \omega^p_a = \lambda^p_{ai}\omega^i,\ \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\omega^i,\ \omega^p_\alpha = \lambda^p_{\alpha i}\omega^i$$

$$\nabla b^n_{pq} = b^n_{pqi}\omega^i,\ \nabla b^n_{ab} = b^n_{abi}\omega^i,\ \nabla b^\alpha_{pq} + b^n_{pq}\omega^\alpha_n = b^\alpha_{pqi}\omega^i,$$

$$\nabla b^\alpha_{ab} + b^n_{ab}\omega^\alpha_n = b^\alpha_{abi}\omega^i,\ \nabla\lambda^a_{pi} + b^n_{pi}\omega^a_n = \lambda^a_{pij}\omega^i, \qquad (2)$$

$$\nabla\lambda^p_{ai} + b^n_{ai}\omega^p_n = \lambda^p_{aij}\omega^j,\ \nabla\lambda^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha ij}\omega^j,\ \nabla\lambda^p_\alpha = \lambda^p_{\alpha ij}\omega^j,$$

где

$$b^{\hat{\alpha}}_{[pq]} = 0,\ b^{\hat{\alpha}}_{[ab]} = 0,\ \lambda^k_{\alpha[i}b^n_{j]k} = 0,\ b^n_{pq}\lambda^q_{[ab]} = \lambda^c_{p[a}b^n_{b]c},,$$

$$b^n_{ab}\lambda^b_{[pq]} = \lambda^s_{a[p}b^n_{q]s}\ \ b^\alpha_{pq}\lambda^q_{[ab]} = \lambda^c_{p[a}b^\alpha_{b]c},\ b^\alpha_{ab}\lambda^b_{[pq]} = \lambda^s_{a[p}b^\alpha_{q]s}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Касательно* r-*оснащенная гиперполоса* $H_m(\Lambda) \subset A_n$ *существует и определяется с произволом* 2rs+(n-m)+m(n–m–1) *функций от m аргументов.*

2. Введем в рассмотрение квазитензоры

$$T_n^p \overset{def}{=} -\frac{1}{r+2} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}, \ \nabla T_n^p + \omega_n^p = T_k^p \omega^k,$$

$$T_n^a \overset{def}{=} -\frac{1}{s+2} b_n^{db} b_{dbc}^n \omega_n^{ca}, \ \nabla T_n^a + \omega_n^a = T_k^a \omega^k, \ (3)$$

$$\lambda_n^\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{m}(b_n^{pq}\lambda_{pq}^\alpha + b_n^{ab}\lambda_{ab}^\alpha), \ \nabla\lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \lambda_k^\alpha \omega^k,$$

$$T_n^i \overset{def}{=} \left\{T_n^p, T_n^a\right\}, \ \nabla T_n^i + \omega_n^i = T_k^i \omega^k.$$

Согласно теореме Тренсона [2] для регулярных гиперполос аффинные нормали всех плоских сечений гиперповерхности V_{n-1}^r (r+1)-мерными плоскостями, проходящими через плоскость $\Lambda(A)$, лежат в (n–r)-плоскости $T_{n-r}(A) = [A, \vec{e}_a, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_n + T_n^p \vec{e}_p]$, которая является нормалью Тренсона Λ-подрасслоения.

Аналогично нормалью Тренсона плоскости L(A) оснащенной гиперполосы $H_m(\Lambda)$ является (n–s)-плоскость $T_{n-s}(A) = [A, \vec{e}_a, \vec{e}_p, \vec{e}_n + T_n^a \vec{e}_a]$.

Определение. *Нормалью Тренсона гиперполосы* $H_m(\Lambda)$ *назовем* (n–m)-*плоскость* $T_{n-m}(A) = T_{n-r}(A) \cap T_{n-s}(A)$ —*плоскость пересечения нормалей Тренсона Λ-, L-подрасслоений. Прямую* $T_1(A) = [A, T_n]$*, где*

$$T_n = T_n^p \vec{e}_p + T_n^a \vec{e}_a + \lambda_n^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_n, \tag{4}$$

назовем прямой Тренсона гиперполосы $H_m(\Lambda)$ *в точке А.*

Из определения и формулы (4) вытекает строение нормали Тренсона гиперполосы $H_m(\Lambda)$: $T_{n-m} = [A, \vec{e}_\alpha, T_n]$.

Известно [4], что между нормалями 1-го и 2-го рода гиперполосы $H_m(\Lambda)$ существует соответствие Бомпьяни — Пантази:

$$\nu_i = b_{ik}^n \nu_n^k + t_i, \ \nabla\nu_i = \nu_{ik}\omega^k, \tag{5}$$

где

$$t_p \overset{def}{=} \frac{1}{m-r} b^n_{abp} b^{ba}_n, \ \nabla t_p = b^n_{pq}\omega^q_n + t_{pi}\omega^i,$$

$$t_a = \frac{1}{s+2} b^n_{cba} b^{bc}_n, \ \nabla t_a = b^n_{ac}\omega^c_n + t_{ai}\omega^i,$$

$$t_i \overset{def}{=} \{t_p, t_a\}, \ \nabla t_i = b^n_{ij}\omega^j_n + t_{ik}\omega^k.$$

Согласно (5), вводим

Определение. *Нормаль 2-го рода гиперполосы* $H_m(\Lambda)$, *определяемая квазитензором*

$$T_i = b^n_{ik} T^k_n + t_i, \ \nabla T_i = T_{ik}\omega^k, \tag{6}$$

назовем нормалью Тренсона 2-го гиперполосы $H_m(\Lambda)$.

Отметим, что тензор (6) распадается на два подтензора $\{T_p\}, \{T_a\}$, которые определяют соответственно нормали Тренсона 2-го рода Λ-, L-подрасслоений.

В результате справедлива

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка к гиперполосе* $H_m(\Lambda) \subset A_n$ *внутренним образом присоединяется нормализация Тренсона* $\{T^i_n, T_i\}$ *и нормализации Тренсона* $\{T^p_n, T_p\}, \{T^a_n; T_a\}$ *соответственно* Λ-, L-*подрасслоений.*

Выясним условия совпадения аффинных нормалей Тренсона и Бляшке гиперполосы $H_m(\Lambda)$.

Теорема 3. *Нормаль Тренсона* $T_{n-m}(A)$ *гиперполосы* $H_m(\Lambda)$ *совпадает с нормалью Бляшке* $B_{n-m}(A)$ [4] *тогда и только тогда, когда*

$$F_i = t_i \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{r+2} b^{st}_n b^n_{stp} = \dfrac{1}{s} b^{bd}_n b^n_{bdp}, \\ \dfrac{1}{r} b^{pq} b^n_{pqc} = \dfrac{1}{s+2} b^{ab}_n b^n_{abc}. \end{cases}$$

Доказательство:

$$T_{n-m}(A) \equiv B_{n-m}(A) \Leftrightarrow T_n = B_n \Leftrightarrow (T^p_n = b^p_n, T^a_n = b^a_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^p_n \overset{def}{=} -\dfrac{1}{s} b^{bd}_n b^n_{bdq} b^{qp}_n = -\dfrac{1}{r+2} b^{st}_n b^n_{stq} b^{qp}_n \overset{def}{=} T^p_n, \\ b^a_n = -\dfrac{1}{r} b^{pq}_n b^n_{pqc} b^{ca}_n = -\dfrac{1}{s+2} b^{db}_n b^n_{dbc} b^{ca}_n \overset{def}{=} T^a_n, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{s} b^{bd}_n b^n_{bdq} = \dfrac{1}{r+2} b^{st}_n b^n_{stq}, \\ \dfrac{1}{r} b^{pq}_n b^n_{pqc} = \dfrac{1}{s+2} b^{ab}_n b^n_{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_q = t_q, \\ F_c = t_c \end{cases} \Leftrightarrow F_i = t_i.$$

3. Рассмотрим аффинные связности, которые индуцируются на гиперполосе $H_m(\Lambda)$ полем нормалей Тренсона $T_{n-m}(A)$. Внешний дифференциал форм $\hat{\omega}^i_j = \omega^i_j - T^i_n \omega^n_j$ имеет вид:

$$d\hat{\omega}^i_j = \hat{\omega}^k_j \Lambda \hat{\omega}^i_k + \hat{R}^i_{jkl} \omega^k \Lambda \omega^l, \tag{7}$$

где

$$\hat{R}^i_{jkl} = T^i_n T^h_n b^n_{h[k} b^n_{l]j} + b^n_{j[k} T^i_{l]} + \lambda^\alpha_{j[k} \lambda^i_{|\alpha|l]}. \tag{8}$$

Из (7) следует, что формы $\hat{\omega}^i_j$ задают внутреннюю аффинную связность $\hat{\gamma}$, индуцируемую полем нормалей Тренсона (4), т. е. полем нормалей 1-го рода $T_{n-m}(A)$, заданным полем квазитензора T^i_n (3). Тензор $\hat{R}^i_{jkl}$ — тензор кривизны связности $\hat{\gamma}$, компоненты $\hat{\gamma}^i_{jk}$ которой имеют строение:

$$\hat{\gamma}^i_{jk} = b^n_{jk} T^i_n, \quad \hat{\gamma}^i_{[jk]} = b^n_{[jk]} T^i_n = 0.$$

Найдем признак эквиаффинности [3] внутренней связности $\hat{\gamma}$. Для этого предварительно находим из формулы (8)

$$\hat{R}^i_{ikl} = T^h_n T^i_n b^n_{i[l} b^n_{k]h} + T^i_{[k} b^n_{l]i} + \lambda^\alpha_{h[k} \lambda^h_{|\alpha|l]} = -g_{[kl]} + \lambda^\alpha_{h[k} \lambda^h_{|\alpha|l]},$$

$$\hat{R}_{jk} = \hat{R}^i_{jki} = T_k T_j - T_i T^i_n b^n_{kj} - T^i_i b^n_{kj} + \lambda^\alpha_{jk} \lambda^i_{\alpha i} - \lambda^\alpha_{ji} \lambda^i_{\alpha k}. \tag{10}$$

Операция альтернации для тензора Риччи (10) приводит к результату:

$$\hat{R}_{[jk]} = T^i_{[j} b^n_{k]i} - \lambda^\alpha_{i[j} \lambda^i_{|\alpha|k]} = g_{[jk]} - \lambda^\alpha_{h[j} \lambda^h_{(\alpha)k]}.$$

Как известно [3], связность $\hat{\gamma}$ эквиаффинна, если

$$\hat{R}^i_{ikl} = 0 \ \vee \ \hat{R}_{[kl]} = 0. \qquad (11)$$

Условие (11) равносильно следующему:

$$g_{[kl]} = \lambda^\alpha_{h[k} \lambda^h_{|\alpha|l]}. \qquad (12)$$

Теорема 4. *Для того чтобы внутренняя аффинная связность* $\hat{\gamma}$ *гиперполосы* $H_m(\Lambda) \subset A_n$*, индуцируемая полем нормалей Тренсона, была эквиаффинной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (12).

Список литературы

1. *Акивис М.А.* О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 7—31.

2. *Лисицына И.Е.* Нормализация Тренсона гиперполосы H_m аффинного пространства. // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1998. Вып 29. С. 38—40.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства: Учебное пособие. Калининград, 2001.

Yu. Popov

NORMALIZATION OF TRENSON FOR HYPERSTRIP $H_m(\Lambda)$

Tangent r-equipped hyperstrips $H_m(\Lambda)$ of affine space A_n are studied. Inner normalization in Trenson sense for hyperstrip $H_m(\Lambda)$ and for its Λ-, L-subbundle are found. The analytic equiaffine conditions of connection $\hat{\gamma}$ induced by field of Trenson normals are obtained. The coincidence conditions of normalization in Trenson sense and normalization in Blyashke sense are found.