3. *Попов Ю. И.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов 2-го порядка $\mathscr{H}$ -распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 2. С. 18—24.

4. *Попов Ю. И.* Поля геометрических объектов $\mathscr{H}$ -распределения аффинного пространства // Диф. геометрия многообр. фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 113—125.

5. *Попов Ю. И., Столяров А. В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.

6. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.



**Об авторе**

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

**About the author**

Dr Juriy Popov — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

УДК 514.76

***Н. А. Рязанов***

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СРАВНЕНИЯ КОМПОНЕНТ ОБЪЕКТА КРИВИЗНЫ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА

*Выведены дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка. Эти сравнения показывают, что в общем случае объект кривизны 2-го порядка образует геометрический объект лишь в совокупности с объектом кривизны 1-го порядка и объектом связности 2-го порядка.*

*Differential comparisons for the components of the curvature object of affine connection of the second order are received. These comparisons show that, in the general case, the second-order curvature object forms a geometric object only in conjunction with the first-order curvature object and the second-order connectivity object.*

**Ключевые слова:** структурные уравнения Лаптева, аффинная связность, объект кривизны 2-го порядка, голономное гладкое многообразие, полуголономное гладкое многообразие, неголономное гладкое многообразие.

**Key words:** Laptev structure equations, affine connection, curvature object of the second order, holonomic smooth manifold, semi-holonomic smooth manifold, non-holonomic smooth manifold.

Рассмотрим структурные уравнения Лаптева $n$-мерного многообразия $M_n$

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \quad (i, j, k, \ldots = \overline{1, n}), \tag{1}$$

где $D$ — символ внешнего дифференциала; $\wedge$ — знак внешнего умножения; $\omega^i$ — главные линейные дифференциальные формы; $\omega^j_i$ — вторичные линейные дифференциальные формы.

Продолжим структурные уравнения (1) на многообразии $M_n$. Замыкая их, найдем



$$(D\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k) \wedge \omega^j = 0.$$

Разрешая эти кубичные уравнения по лемме Лаптева, получим [1]

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}. \tag{2}$$

Уравнения (1), (2) являются структурными уравнения Лаптева главного расслоения линейных реперов $L_{n^2}(M_n)$ над гладким многообразием $M_n$.

Аффинная связность (без кручения) для $n$-мерного многообразия $M_n$ определяется в расслоенном пространстве $L_{n^2}(M_n)$ путем задания объекта связности $\Gamma^i_{jk}$, компоненты которого симметричны по нижним индексам. Формы связности имеют вид [2]

$$\Omega^i_j = \omega^i_j + \Gamma^i_{jk}\omega^k. \tag{3}$$

Дифференцируя их внешним образом с учетом (1), (2), получим

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k - \omega^k \wedge (d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k + \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{lt}\omega^t - \omega^i_{jk}). \tag{4}$$

Компоненты объекта аффинной связности $\Gamma^i_{jk}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} - \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l, \tag{5}$$

где тензорный дифференциальный оператор $\Delta$ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k.$$

Тогда уравнения (4) можно переписать в виде

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k - \omega^k \wedge (\Gamma^i_{jkl}\omega^l + \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{lt}\omega^t).$$

Вынося общие базисные формы $\omega^l$ за скобку, получим

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k - (\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^t_{jk}\Gamma^i_{tl})\omega^k \wedge \omega^l.$$

Альтернируя последнее слагаемое, введем обозначение

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\ \ R^i_{jkl} = -(\Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]}), \tag{6}$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках. Получили структурные уравнения для форм связности $\Omega^i_j$, включающие в себя компоненты объекта кривизны $R^i_{jkl}$.

Продолжая уравнения (2) с учетом их самих, а также (1), получим

$$D\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}. \tag{7}$$



Найдем дифференциальные сравнения для пфаффовых производных $\Gamma^i_{jkl}$ объекта $\Gamma^i_{jk}$. Для этого продолжим уравнения (5) с помощью структурных уравнений (1), (2), (7). Получим

$$d\Gamma^i_{jkl} \wedge \omega^l - \Gamma^l_{jkt}\omega^t \wedge \omega^i_l + \Gamma^i_{jkl}\omega^t \wedge \omega^l_t + \Gamma^i_{tkl}\omega^l \wedge \omega^t_j + \Gamma^i_{jlt}\omega^t \wedge \omega^l_k +$$
$$+\Gamma^i_{jl}\omega^t \wedge \omega^l_{kt} + \Gamma^i_{lk}\omega^t \wedge \omega^l_{jt} - \Gamma^l_{jk}\omega^t \wedge \omega^i_{lt} + \omega^t \wedge \omega^i_{jkt} = 0.$$

Вынося общие базисные формы $\omega^l$ справа и собирая первые пять слагаемых под дифференциальный оператор $\Delta\Gamma^i_{jkl}$, имеем

$$(\Delta\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^t_{jk}\omega^i_{tl} - \Gamma^i_{tk}\omega^t_{jl} - \Gamma^i_{jt}\omega^t_{kl} - \omega^i_{jkl}) \wedge \omega^l = 0.$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана и альтернируя по индексам $k$ и $l$, получим сравнения по модулю базисных форм $\omega^l$

$$\Delta\Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^t_{j[k}\omega^i_{tl]} - \Gamma^i_{t[k}\omega^t_{jl]} - \Gamma^i_{jt}\omega^t_{[kl]} - \omega^i_{j[kl]} \cong 0 \pmod{\omega^l}. \tag{8}$$

Найдем результат действия дифференциального оператора на компоненты объекта кривизны $R^i_{jkl}$ аффинной связности 1-го порядка. Для этого запишем дифференциальные сравнения для свернутых произведений $\Gamma^t_{jk}\Gamma^i_{tl}$ и проальтернируем их по индексам $k$ и $l$:

$$\Delta\Gamma^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]} \cong \omega^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]}. \tag{9}$$

Применяя дифференциальный оператор $\Delta$ к обеим частям равенства ($6_2$), а также учитывая (8) и (9), получим

$$\Delta R^i_{jkl} \cong -\Gamma^i_{jm}\omega^m_{[kl]} + \omega^i_{j[kl]}. \tag{10}$$

В случае полуголономного гладкого многообразия $M_n$ 2-го порядка $(\omega^i_{[jk]} \cong 0, \omega^i_{j[kl]} \cong 0)$ дифференциальные сравнения (10) для компонент объекта кривизны $R^i_{jkl}$ аффинной связности примут тензорный вид

$$\Delta R^i_{jkl} \cong 0.$$

**Утверждение.** *Аффинная связность (1-го порядка) задается в расслоении линейных кореперов* $L_{n^2}(M_n)$ *со структурными уравнениями* (1), (2) *с помощью поля объекта* $\Gamma^i_{jk}$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (5). *Объект* $\Gamma^i_{jk}$ *определяет формы аффинной связности* $\Omega^i_j$ (3), *удовлетворяющие структурным уравнениям* ($6_1$), *в которые входит объект кривизны* $R^i_{jkl}$. *Компоненты объекта* $R^i_{jkl}$ *выражаются по формулам* ($6_2$) *и удовлетворяют* [3, с. 52] *дифференциальным сравнениям* (10).

*Если гладкое многообразие* $M_n$ *является неголономным многообразием*



$M^N_n$ [3; 4], *т. е. не выполняются сравнения* $\omega^m_{[kl]} \cong 0, \omega^i_{j[kl]} \cong 0$, *то объект кривизны аффинной связности* $R^i_{jkl}$ *образует квазитензор лишь в совокупности с объектом связности* $\Gamma^i_{jk}$.

*В случае полуголономного* [4] *гладкого многообразия* $M^S_n$, *когда* $\omega^m_{[kl]} \cong 0$, $\omega^i_{j[kl]} \cong 0$, *объект кривизны* $R^i_{jkl}$ *– тензор.*

Формы аффинной связности 2-го порядка [2] состоят из форм (3) и следующих форм:

$$\Omega^i_{jk} = \omega^i_{jk} + L^i_{jkl}\omega^l. \tag{11}$$

Дифференцируя их внешним образом с учетом (1), (2), (7), получим

$$\begin{gathered} D\Omega^i_{jk} = \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \\ -\omega^l \wedge (dL^i_{jkl} + L^t_{jkl}\omega^i_t - L^i_{tkl}\omega^t_j - L^i_{jtl}\omega^t_k - L^i_{jkt}\omega^t_l - \Gamma^i_{tl}\omega^t_{jk} + \\ + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)} - \omega^i_{jkl} + L^t_{jkm}\Gamma^i_{tl}\omega^m - L^i_{tkm}\Gamma^t_{jl}\omega^m - L^i_{jtm}\Gamma^t_{kl}\omega^m). \end{gathered} \tag{12}$$

Компоненты объекта аффинной связности 2-го порядка $L^i_{jkl}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta L^i_{jkl} - \Gamma^i_{tl}\omega^t_{jk} + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)} - \omega^i_{jkl} = L^i_{jklm}\omega^m, \tag{13}$$

где тензорный дифференциальный оператор $\Delta$ действует следующим образом:

$$\Delta L^i_{jkl} = dL^i_{jkl} + L^t_{jkl}\omega^i_t - L^i_{tkl}\omega^t_j - L^i_{jtl}\omega^t_k - L^i_{jkt}\omega^t_l .$$

Тогда уравнения (12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} D\Omega^i_{jk} = \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \\ -\omega^l \wedge (L^i_{jklm}\omega^m + L^t_{jkm}\Gamma^i_{tl}\omega^m - L^i_{tkm}\Gamma^t_{jl}\omega^m - L^i_{jtm}\Gamma^t_{kl}\omega^m). \end{gathered}$$

Вынося общие базисные формы $\omega^m$ за скобку, получим

$$\begin{gathered} D\Omega^i_{jk} = \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \\ -(L^i_{jklm} + L^t_{jkm}\Gamma^i_{tl} - L^i_{tkm}\Gamma^t_{jl} - L^i_{jtm}\Gamma^t_{kl})\omega^l \wedge \omega^m. \end{gathered}$$

Альтернируя последнее слагаемое по индексам $l$ и $m$, введем обозначение

$$D\Omega^i_{jk} = \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l + R^i_{jklm}\omega^l \wedge \omega^m,$$
$$R^i_{jklm} = -(\Gamma^i_{jk[lm]} + L^t_{jk[l}\Gamma^i_{m]t} - L^i_{kt[l}\Gamma^t_{m]j} - L^i_{jt[l}\Gamma^t_{m]k}). \tag{14}$$

Найдем дифференциальные сравнения для пфаффовых производных $L^i_{jklm}$ объекта $L^i_{jkl}$. Для этого продолжим уравнения (13) с помощью структурных уравнений (1), (2), (7). Получим

$$dL^i_{jklm} \wedge \omega^m - L^t_{jklm}\omega^m \wedge \omega^i_t + L^i_{jklt}\omega^m \wedge \omega^t_m + L^i_{tklm}\omega^m \wedge \omega^t_j$$
$$+L^i_{jtlm}\omega^m \wedge \omega^t_k + L^i_{jktm}\omega^m \wedge \omega^t_l + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)m} \wedge \omega^m - L^i_{(klm}\omega^i_{tj)} \wedge \omega^m$$
$$-\Gamma^i_{tl}\omega^t_{jkm} \wedge \omega^m + L^i_{tlm}\omega^t_{jk} \wedge \omega^m + \omega^m \wedge \omega^i_{jklm} = 0,$$

где симметрирование в скобках производится по индексам $k$ и $j$. Вынося общие базисные формы $\omega^m$ и собирая первые шесть слагаемы под дифференциальный оператор $\Delta L^i_{jklm}$, имеем

$$(\Delta L^i_{jklm} + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)m} - L^t_{(klm}\omega^i_{tj)} - \Gamma^i_{tl}\omega^t_{jkm} + L^i_{tlm}\omega^t_{jk} - \omega^i_{jklm}) \wedge \omega^m \cong 0.$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана и альтернируя по индексам $l$ и $m$, получим сравнения по модулю базисных форм $\omega^m$:

$$\Delta L^i_{jk[lm]} + \Gamma^t_{(k[l}\omega^i_{tj)m]} - L^t_{(k[lm]}\omega^i_{tj)} - \Gamma^i_{t[l}\omega^t_{jkm]} + L^i_{t[lm]}\omega^t_{jk} - \omega^i_{jk[lm]} \cong 0 \,(\mathrm{mod}\ \omega^m). \tag{15}$$

Найдем результат действия дифференциального оператора на компоненты объекта кривизны $R^i_{jklm}$ аффинной связности 2-го порядка. Для этого запишем дифференциальные сравнения для свернутых произведений, входящих в формулу ($14_2$), и проальтернируем их по индексам $l$ и $m$:

$$\Delta L^t_{jk[l}\Gamma^i_{m]t} \cong -\Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{[mt}\omega^t_{sl]} + \Gamma^t_{sk}\Gamma^i_{[mt}\omega^s_{jl]} + \Gamma^t_{js}\Gamma^i_{[mt}\omega^s_{kl]} + \Gamma^i_{[mt}\omega^t_{jkl]} + L^t_{jk[l}\omega^i_{m]t},$$
$$\Delta L^i_{jt[l}\Gamma^t_{m]k} \cong -\Gamma^s_{jt}\Gamma^t_{[mk}\omega^i_{sl]} + \Gamma^i_{st}\Gamma^t_{[mk}\omega^s_{jl]} + \Gamma^i_{js}\Gamma^t_{[mk}\omega^s_{tl]} + \Gamma^t_{[mk}\omega^i_{jtl]} + L^i_{jt[l}\omega^t_{m]k}, \tag{16}$$
$$\Delta L^i_{kt[l}\Gamma^t_{m]j} \cong -\Gamma^s_{kt}\Gamma^t_{[mj}\omega^i_{sl]} + \Gamma^i_{st}\Gamma^t_{[mj}\omega^s_{kl]} + \Gamma^i_{ks}\Gamma^t_{[mj}\omega^s_{tl]} + \Gamma^t_{[mj}\omega^i_{ktl]} + L^i_{kt[l}\omega^t_{m]j}.$$

Применяя дифференциальный оператор $\Delta$ к обеим частям равенства ($14_2$), а также учитывая (15) и (16) с последовательным раскрытием альтернирования, симметрирования и приведением подобных слагаемых, получим

$$\Delta R^i_{jklm} \cong -R^i_{tml}\omega^t_{jk} - L^t_{jk[l}\omega^i_{m]t} + \omega^i_{jk[lm]}. \tag{17}$$

В случае полуголономного гладкого многообразия $(\omega^i_{jk[lm]} \cong 0)$ дифференциальные сравнения (17) для компонент объекта кривизны $R^i_{jklm}$ аффинной связности примут вид

$$\Delta R^i_{jklm} \cong -R^i_{tml}\omega^t_{jk} - L^t_{jk[l}\omega^i_{m]t}. \tag{18}$$

**Теорема.** *Аффинная связность 2-го порядка задается в расслоении кореперов 2-го порядка со структурными уравнениями* (1), (2), (7) *с помощью поля объекта* $L=(\Gamma^i_{jk}, L^i_{jkl})$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (5), (13). *Объект L определяет формы аффинной связности 2-го порядка* $\Omega^i_j, \Omega^i_{jk}$ (3), (11), *удовлетворяющие структурным уравнениям* ($6_1$, $14_1$), *в которые входят компоненты объекта кривизны* $R=(R^i_{jkl}, R^i_{jklm})$. *Компоненты* $R^i_{jklm}$ *выражаются по формулам* ($14_2$) *и удовлетворяют дифференциальным сравнениям* (17).

*Если гладкое многообразие* $M_n$ *является неголономным многообразием* $M^N_n$, *т. е. не выполняются сравнения*



$$\omega^t_{[lm]} \cong 0, \omega^i_{jk[lm]} \cong 0,$$

*то компоненты* $R^i_{jklm}$ *образуют квазитензор лишь в совокупности с объектом связности L и тензором* $R^i_{jkl}$.

*В случае полуголономного гладкого многообразия* $M^S_n$, *когда*

$$\omega^t_{[lm]} \cong 0, \ \ \omega^i_{jk[lm]} \cong 0,$$

*дифференциальные сравнения* (17) *принимают вид* (18).

*Для особого многообразия* $\bar{M}^S_n$, *когда*

$$\omega^i_{jk} \cong 0,$$

*компоненты* $R^i_{jklm}$ *самостоятельно образуют тензор.*

**Замечание.** Дифференциальные сравнения (18) сохраняются в случае голономного гладкого многообразия $M^N_n$ [3]. Об этом фактически упоминается в работе [2], где говорится о квазитензоре кривизны 2-го порядка, однако аналитическое обоснование отсутствует. В настоящей работе приведены соответствующие дифференциальные сравнения не только в случае голономного многообразия, но и для полуголономного и неголономного гладких многообразий.

### Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. Семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

3. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Диф. геом. многобр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.

**Об авторе**

Никита Андреевич Рязанов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: ryazanov-92@mail.ru

**About the author**

Nikita Ryazanov — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: ryazanov-92@mail.ru



УДК 519.6

*Л. В. Зинин, А. А. Шарамет, А. Ю. Васильева*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КИСЛОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНО ЗАРЯЖЕННЫМ МИКРОСПУТНИКОМ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

*Приводятся результаты моделирования взаимодействия одноионной тепловой ионосферной плазмы, состоящей из ионов кислорода и электронов с заряженным микроспутником. Для моделирования использовался метод молекулярной динамики. Показано, что за спутником возникает так называемая ионная тень с низкой ионной концентрацией.*

*The results of modeling the interaction of a single-ion thermal ionospheric plasma consisting of oxygen ions and electrons with a charged microsatellite are presented. The molecular dynamics modeling method was used. It is shown that behind the satellite there is a so-called ionic shadow with a low ionic concentration.*

**Ключевые слова**: математическое моделирование, тепловая плазма, метод молекулярной динамики, заряженный спутник.

**Key words:** mathematical modeling, thermal plasma, molecular dynamics method, charged satellite

Хорошо известно, что на измерения макропараметров тепловой ионосферно-магнитосферной плазмы значительное влияние оказывает заряд космического аппарата. Этот факт существенно осложняет интерпретацию измерений, которая и так достаточно сложная экспериментальная задача. Исследованию этой проблемы посвящено достаточно большое число работ, отметим классическую — [1]. В последние годы делались различные попытки снижения потенциала спутника во время космического полета (см.: [2; 3]).

Вместе с тем имеющиеся в настоящее время активные способы снижения положительного потенциала спутника, например с помощью инжекции ионного пучка [2], отрицательно сказываются на измерениях другими приборами. Для анализа измерений были разработаны неко-