ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОВЕРХНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ

Е.В.С и л а е в
(МГПИ им. В.И.Ленина)

В работе рассматривается случай, когда поверхность, лежащая на гиперсфере в евклидовом пространстве, является минимальной по отношению к гиперсфере.

Пусть поверхность ϑ_p лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau)$ с центром в точке O и радиуса τ в евклидовом пространстве E_n. Поместим начало абсолютной системы координат в точку O. Присоединим к каждой точке $x\in\vartheta_p$ подвижной репер $R^x=\{x,\vec e_i,\vec e_\alpha\}$ ($i,j=1,2,\dots,p;\alpha,\beta=p+1,\dots,n$) так, чтобы векторы $\vec e_i$ лежали в касательном пространстве T_x в точке x, а векторы $\vec e_\alpha$ образовывали ортонормированный базис ортогонального дополнения к пространству T_x в точке x. Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\overrightarrow{Ox}=\omega^i\vec e_i,$$
$$d\vec e_i=\omega_i^j\vec e_j+\omega_i^\alpha\vec e_\alpha,$$
$$d\vec e_\alpha=\omega_\alpha^i\vec e_i+\omega_\alpha^\beta\vec e_\beta.$$

При смещении точки x вдоль поверхности ϑ_p имеем: $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и применяя лемму Картана, получим $\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$, $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$. При указанном выборе подвижного репера R^x имеют место формулы:

$$\overrightarrow{Ox}\cdot\vec b_{ij}+\gamma_{ij}=0, \qquad (1)$$

где $\vec b_{ij}=b_{ij}^\alpha\vec e_\alpha$, $\gamma_{ij}=\vec e_i\cdot\vec e_j$.

Направим единичные векторы $\vec e_i$ вдоль линий некоторой сети $\Sigma_p\subset\vartheta_p$, тогда формы $\omega_i^j\,(i\neq j)$ станут главными $\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k\,(i\neq j)$. Докажем, что справедлива

Л е м м а. Линия ω^1 сети $\Sigma_p\subset\vartheta_p$ является геодезической линией на гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau)$ (т.е. дугой большой окружности гиперсферы) тогда и только тогда, когда эта линия является геодезической линией на поверхности ϑ_p, и $\forall x$ вектор $\vec b_{11}$ вынужденной кривизны этой линии удовлетворяет условию: $\vec b_{11}=-\frac{1}{\tau^2}\overrightarrow{Ox}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линию ω^1: $\omega^{i_1}=0$ ($i_1=2,\dots,p$). В силу деривационных формул репера R^x имеем: $d\vec e_1=\omega_1^1\vec e_1+a_{1j}^{k_1}\omega^j\vec e_{k_1}+b_{1j}^\alpha\omega^j\vec e_\alpha$, т.е. $d\vec e_1=\omega_1^1\vec e_1+\omega^1(a_{11}^{k_1}\vec e_{k_1}+b_{11}^\alpha\vec e_\alpha)$.

Линия ω^1 является геодезической линией на гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau)$ тогда и только тогда, когда ее соприкасающаяся плоскость $[x,\vec e_1,d\vec e_1]=[x,\vec e_1,a_{11}^{k_1}\vec e_{k_1}+\vec b_{11}]$ проходит через прямую Ox, т.е. $\overrightarrow{Ox}=\alpha\vec e_1+\beta(a_{11}^{k_1}\vec e_{k_1}+\vec b_{11})$, откуда следует, что

$$\alpha=0,\quad \beta a_{11}^{k_1}=0,\quad \overrightarrow{Ox}=\beta\vec b_{11}. \qquad (2)$$

Второе равенство этой системы означает, что линия ω^1 является геодезической на поверхности ϑ_p. Умножая скалярно левую и правую части последнего равенства системы (2) на вектор $\overrightarrow{Ox}$ и учитывая, что $\overrightarrow{Ox}^2=\tau^2$, получим $\tau^2=\beta(\overrightarrow{Ox}\cdot\vec b_{11})$ или в силу формулы 1) $\tau^2=-\beta$. Таким образом, $\vec b_{11}=-\frac{1}{\tau^2}\overrightarrow{Ox}$.

Т е о р е м а. Пусть поверхность $\vartheta_p\subset E_n$ лежит на гиперсфере и несет сопряженную сеть. Поверхность ϑ_p является минимальной по отношению к гиперсфере тогда и только тогда, когда сумма векторов вынужденных кривизн всех линий этой сети коллинеарна вектору $\overrightarrow{Ox}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из формулы (1), сопряженная сеть на гиперсфере является ортогональной. Следовательно, $\gamma_{ij}=b_{ij}^\alpha=0\,(i\neq j)$ и $\forall x\in\vartheta_p$ вектор средней кривизны поверхности равен $\vec M=\frac{1}{p}\gamma^{ij}b_{ij}^\alpha\vec e_\alpha=\frac{1}{p}\sum_i\vec b_{ii}$.

Пусть $\sum_i\vec b_{ii}=\alpha\overrightarrow{Ox}$. Умножая это равенство скалярно на вектор $\overrightarrow{Ox}$, с учетом формулы (1) и $\overrightarrow{Ox}^2=\tau^2$, получим: $\sum_i(\vec b_{ii}\cdot\overrightarrow{Ox})=\alpha\tau^2$ или $-p=\alpha\tau^2$, откуда $\alpha=-\frac{p}{\tau^2}$. Таким образом, $\sum_i\vec b_{ii}=-\frac{p}{\tau^2}\overrightarrow{Ox}$, т.е. $\vec M=\frac{1}{p}\sum_i\vec b_{ii}=-\frac{1}{\tau^2}\overrightarrow{Ox}$. Но равенство $\vec M=-\frac{1}{\tau^2}\overrightarrow{Ox}$ означает, что поверхность ϑ_p является минимальной по отношению к гиперсфере.

Известно, что скалярная кривизна R поверхности $\vartheta_p\subset E_n$, отнесенной к ортонормированному подвижному реперу, вычисляется по формуле $R=(p\vec M)^2-\sum_{ij}\vec b_{ij}^2$.

Предположим, что минимальная по отношению к гиперсфере поверхность $\vartheta_p\subset S_{n-1}(O,\tau)\subset E_n$ несет сопряженную сеть, тогда в силу вышесказанного ($\vec M=-\frac{1}{\tau^2}\overrightarrow{Ox}$, $\vec b_{ij}=0\,(i\neq j)$) для такой поверхности

$$R=p^2\frac{1}{\tau^2}-\sum_i\vec b_{ii}^2,$$

где $\vec b_{ii}$ – векторы вынужденных кривизн линий сети Σ_p