УДК 514.76

О. А. Монахова

(Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского)

О СТРУКТУРНОЙ ГРУППЕ НА РАССЛОЕНИИ ДВАЖДЫ КОВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ

Описано действие полной линейной группы на расслоении дважды ковариантных тензоров. Доказаны некоторые тождества, которым удовлетворяют операторы действия группы.

Ключевые слова: расслоение дважды ковариантных тензоров, структурная группа.

1. Основные определения и факты

Рассмотрим гладкое класса C^∞ многообразие M_n и расслоение $T^0{}_2(M_n)$ дважды ковариантных тензоров над ним. Локальные координаты (x^i) на базе M_n порождают координаты (x^i, x_{jk}), $i, j, k = 1, \ldots, n,$ на расслоении. Пусть p — произвольная точка многообразия M_n и T_p — значение тензорного поля T типа (0,2) в этой точке, $T_p \in (T^0{}_2(M_n))_p$. Если $\widetilde{p}$ — точка на расслоении $T^0{}_2(M_n)$, $\widetilde{p} = (p, T_p)$, то

$$x^i(\widetilde{p}) = x^i(p) \text{ — координаты точки } p,$$

$$x_{jk}(\widetilde{p}) = t_{jk} \text{ — компоненты тензора } T_p = t_{jk} dx^j \otimes dx^k$$

в координатах (x^i).

На расслоении $T^0{}_2(M_n)$ в координатах (x^i, x_{jk}) возникает поле натурального репера, образованное векторными полями

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial^{jk} = \frac{\partial}{\partial t_{jk}}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

В [1] построен вертикальный лифт тензорных полей типа (0, 2). Для тензорного поля $Q = Q_{ij} dx^i \otimes dx^j$ имеем следующее локальное представление лифта

$$Q^V = Q_{ij} \partial^{ij} . \tag{1}$$

Если на базе M_n задана линейная связность ∇, то с ее помощью можно построить горизонтальные лифты векторных полей на расслоении $T^0{}_2(M_n)$, а также связность ∇^H [2]

$$X^H = X^k \partial_k + X^s (\Gamma^m_{si} x_{mj} + \Gamma^h_{sj} x_{ih}) \partial^{ij} , \tag{2}$$

где $X = X^i \partial_i$ — локальное представление векторного поля X,

Γ^k_{ij} — компоненты связности ∇ в координатах (x^i).

2. Действие полной линейной группы на расслоении дважды ковариантных тензоров

Определим действие полной линейной группы $GL(n, \mathbf{R})$ на расслоении $T^0{}_2(M_n)$ с помощью гомеоморфизма R_A пространства $(T^0{}_2(M_n))_p$ в себя, действующего по закону:

$$R_A(T_p) = T_p A, \quad A \in GL(n, \mathbf{R}). \tag{3}$$

Перейдем к представлению действия группы в координатах (x^i, x_{jk}). Используя разложение тензора

$$T_p = t_{jk} dx^j \otimes dx^k \tag{4}$$

и обозначив его образ $\widetilde{T}_p = T_p A$, получим разложение $\widetilde{T}_p$ в виде

$$\widetilde{T}_p = (a_i^k a_j^h t_{kh})(dx^i \otimes dx^j). \tag{5}$$

Учитывая равенства (4) и (5), получим координатное представление действия (3) полной линейной группы на расслоении дважды ковариантных тензоров:

$$\widetilde{t}_{ij} = a_i^k a_j^h t_{kh}. \qquad (6)$$

Предложение 1. *Действие полной линейной группы GL(n, **R**) на расслоении $T^0{}_2(M_n)$, определенное по закону* (3)*, является правым.*

Доказательство. Из определения (3) действия группы следует

$$(R_B \circ R_A)(T_p) = R_B\,(T_p A) = T_p\,(AB),$$

тогда

$$R_B \circ R_A = R_{(AB)},$$

что соответствует правому действию.

Предложение 2. *Действие полной линейной группы GL(n,**R**) на расслоении $T^0{}_2(M_n)$, определенное по закону* (3)*, неэффективно.*

Доказательство. Найдем элементы A полной линейной группы, осуществляющие тождественное отображение:

$$\mathrm{R}_A(T_p) = T_p,$$

T_p — произвольный тензор в точке $p \in M_n$. Используем координатное представление (6) действия группы:

$$t_{ij} = a_i^k a_j^h t_{kh},$$

получим

$$a_i^k a_j^h = \delta_i^k \delta_j^h.$$

Таким образом, ядро неэффективности составляют матрицы

$$A = \lambda E,\ \lambda = \pm 1,$$

E — единичная матрица.

В силу определения действие группы $GL(n, \mathbf{R})$ на расслоении не является транзитивным, орбитами выступают слои $(T^0{}_2(M_n))_p$ расслоения.

3. Операторы действия группы

Построим операторы действия группы

$$X_p^q = \xi_{pij}^q \partial^{ij},$$

где

$$\xi^q_{pij} = \left.\frac{\partial \tilde{t}_{ij}}{\partial a^p_q}\right|_E = \left.\frac{\partial (a^k_i a^h_j t_{kh})}{\partial a^p_q}\right|_E = \delta^q_i t_{pj} + \delta^q_j t_{ip}\,.$$

Таким образом, в локальных координатах (x^i, t_{jk}) операторы $X_p{}^q$ имеют вид:

$$X_p{}^q = t_{pa}\partial^{qa} + t_{ap}\partial^{aq}\,. \tag{7}$$

Прямыми вычислениями получим, что коммутатор любых операторов разлагается по самим операторам

$$[X_p{}^q, X_r{}^s] = X_p{}^s \delta_r{}^q - X_r{}^q \delta_p{}^s. \tag{8}$$

Предложение 3. *Для произвольного оператора $X_p{}^q$, тензорного поля Q типа (0, 2), векторного поля Y выполняются следующие равенства:*

1) $[Q^V, X_p{}^q] = Q_{pa}\partial^{qa} + Q_{ap}\partial^{aq}$,
2) $[Y^H, X_p{}^q] = (Y^s\Gamma^b{}_{sa})[X^a{}_b, X^q{}_p]$,
3) $\nabla^H_{X^q_p} Q^V = 0$,
4) $\nabla^H_{Q^V} X^q_p = [Q^V, X^q_p]$,
5) $\nabla^H_{X^q_p} Y^H = 0$,
6) $\nabla^H_{Y^H} X^q_p = [Y^H, X^q_p]$,

где $\Gamma_{ij}{}^k$ — компоненты связности ∇ в координатах (x_i).

Доказательство. Используя локальные представления (1) и (7), а также свойства коммутаторов базисных полей [1], получим

$$[Q^V, X_p{}^q] = [Q_{ab}\partial^{ab},\ t_{pi}\partial^{qi} + t_{ip}\partial^{iq}] = Q_{pa}\partial^{qa} + Q_{ap}\partial^{aq}.$$

Из (2) и (7), учитывая равенство (8), получим

$$[Y^H, X_p{}^q] = [\,Y^k\partial_k + Y^s(\Gamma^m_{si}x_{mj} + \Gamma^h_{sj}x_{ih})\partial^{ij},\ t_{pa}\partial^{qa} + t_{ap}\partial^{aq}\,] =$$
$$= (Y^s\Gamma^b{}_{sa})(X_b{}^q\delta_p{}^a - X_p{}^a\delta_b{}^q) = (Y^s\Gamma^b{}_{sa})[X^a{}_b, X^q{}_p].$$

Аналогично доказываются остальные тождества.

Список литературы

1. *Монахова О. А.* О некоторых лифтах на тензорном расслоении типа (0, 2) // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 5: Актуальные проблемы математики и механики: мат-лы Междунар. науч. конф. Казань, 2000. С. 153.
2. *Монахова О. А.* Горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров // Диф. геом. многообр. фигур: межвуз. темат. сб. науч. тр. Вып. 36. Калининград, 2005. С. 88—92.

O. Monakhova

ABOUT THE STRUCTURE GROUP ON THE BUNDLE OF THE TENSORS OF THE TYPE (0,2)

The action of complete linear group on the bundle of the tensors of the type (0,2) is described. Some identities which operators of the action group satisfy are proved.

УДК 514.76

Н. Д. Никитин

(Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского)

ОБ АЛГЕБРЕ ЛИ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С (n–1)-МЕРНЫМИ ОРБИТАМИ, ОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНВАРИАНТНОЙ НЕЛИНЕЙНУЮ СВЯЗНОСТЬ

Показано, что максимальная размерность алгебры Ли абелевой группы преобразований с (n-1)-мерными орбитами, оставляющей инвариантной нелинейную связность, равна $2n$–2.

***Ключевые слова*:** алгебра Ли, абелева группа преобразований, нелинейная связность.

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ — касательное расслоение, $\pi: T(M) \to M$ — каноническая про-