ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2 1971

ОВЧИННИКОВ В.М.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ В МНОГООБРАЗИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Изучается дифференцируемое отображение поверхности S_h проек-тивного пространства P_n в многообразие $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов [1]. Такое отображение эквивалентно изучению h-мер-ного многообразия пар фигур F_1, F_2, где F_1 -квадратичный элем а F_2 -не инцидентная ему точка.

§ 1. Постановка задачи.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n многооб разие $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов и h-мерную поверх-ность S_h. Предположим, что между точками поверхности S_h и квадратичными элементами многообразия $(h,h,n)^2$ установлено локально биективное соответствие

$$\varphi: S_h \to (h,h,n)^2.$$

Располагая вершины $\bar{A}_\alpha\ (\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$ репера $\{\bar{A}_1,\dots,\bar{A}_{n+1}\}$ в гиперпл кости квадратичного элемента и совмещая вершину $\bar{A}_{n+1}$ с соотве вующей точкой поверхности S_h, приведем уравнения локального квадратичного элемента и систему дифференциальных уравнений от

ражения φ, соответственно, к виду:

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1, \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega^{\check a}_{n+1} = \Lambda^{\check a}_{\hat a}\,\omega^{\hat a}, \quad \Theta_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta,\hat a}\,\omega^{\hat a}, \\ &\omega_\alpha = b_{\alpha\hat a}\,\omega^{\hat a}, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где $\omega^{\beta'}_{\alpha'}$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера

$$\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n+1}\}, \quad \omega^{\hat a}_{n+1} = \omega^{\hat a}, \quad \omega^{n+1}_\alpha = \omega_\alpha,$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta - a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha + \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}\omega^\gamma_\gamma, \quad (\hat a,\hat b = 1,\dots,h;\ \check a,\check b = h+1,\dots,n;\ \alpha',\beta' = 1,\dots,n+1).$$

Замыкая систему дифференциальных уравнений (1.2), получим :

$$\begin{aligned} d\Lambda^{\check a}_{\hat a} &= \Lambda^{\check a}_{\hat b}\Lambda^{\check b}_{\hat a}\cdot\omega^{\hat b}_{\check b} + \Lambda^{\check a}_{\hat b}\cdot\omega^{\hat b}_{\hat a} - \Lambda^{\check b}_{\hat a}\,\omega^{\check a}_{\check b} - \omega^{\check a}_{\hat a} + \Lambda^{\check a}_{\hat a\hat b}\,\omega^{\hat b}, \\ dP_{\alpha\beta,\hat a} &= -P_{\alpha\beta,\hat a}\,\omega^{n+1}_{n+1} + P_{\alpha\beta,\hat b}\Lambda^{\check b}_{\hat a}\,\omega^{\hat b}_{\check b} + P_{\alpha\beta,\hat b}\,\omega^{\hat b}_{\hat a} + \\ &\quad + P_{\alpha\gamma,\hat a}\,\omega^\gamma_\beta - \frac{2}{n}P_{\alpha\beta,\hat a}\,\omega^\gamma_\gamma + P_{\gamma\beta,\hat a}\,\omega^\gamma_\alpha + P^*_{\alpha\beta,\hat a\hat b}\,\omega^{\hat b}, \\ d b_{\alpha\hat a} &= -2 b_{\alpha\hat a}\,\omega^{n+1}_{n+1} + b_{\alpha\hat b}\Lambda^{\check b}_{\hat a}\,\omega^{\hat b}_{\check b} + b_{\alpha\hat b}\,\omega^{\hat b}_{\hat a} + \\ &\quad + b_{\check b\hat a}\,\omega^{\check b}_\alpha + b_{\hat b\hat a}\,\omega^{\hat b}_\alpha + b_{\alpha\hat a\hat b}\,\omega^{\hat b}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Учитывая (1.1), получим тождество :

$$a^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta,\hat a} \equiv 0. \tag{1.4}$$

Система величин $\{\Lambda^{\check a}_{\hat a}\}$ образует квадратичный геометрический объект, который определяет касательную плоскость поверхности S_h.

Система величин,

$$P^{\hat c}_{\check a} = b^{\hat c\hat a}\, b_{\check a\hat a}, \tag{1.5}$$

где $b^{\hat{a}\hat{e}} \cdot b_{\hat{a}\hat{c}} = \delta^{\hat{e}}_{\hat{c}}$, $\det(b_{\hat{a}\hat{c}}) \neq 0$, определяют характеристич кое $(n-k-1)$-мерное подпространство [2] квадратичного элеме

$$x^{\hat{c}} + P^{\hat{c}}_{\breve{a}}\, x^{\breve{a}} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \qquad (1.($$

§ 2. Полярно-ассоциированный репер.

Назовем $(k-1)$ -мерную плоскость, по которой касательная плоскость к поверхности S_k пересекается с гиперплоскостью локального квадратичного элемента, ассоциированным подпростран вом.

Ассоциированное подпространство определяется уравнениями:

$$x^{\breve{a}} - \Lambda^{\breve{a}}_{\hat{a}}\, x^{\hat{a}} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \qquad (2.1$$

Будем считать, что ассоциированное подпространство не пересе кается с полярным.

Расположим (k) вершин репера $\bar{A}_{\hat{a}}$ в ассоциированном подпро ранстве, а $(n-k)$ вершин репера $\bar{A}_{\breve{a}}$ в полярном ему подпростра тве относительно квадратичного элемента. Такой репер называется полярно-ассоциированным.

Все исследования в дальнейшем проводим в полярно-ассоциированном репере.

Уравнения (2.I) ассоциированного подпространства и полярног подпространства примут, соответственно, вид:

$$x^{\breve{a}} = 0, \quad x^{n+1} = 0, \qquad (2.2$$

$$x^{\hat{a}} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \qquad (2.3$$

Уравнения проблемы примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta,\hat{a}}\, \omega^{\hat{a}}, \quad \omega_{\alpha} = b_{\alpha\hat{a}}\, \omega^{\hat{a}}, \\ \omega^{\hat{a}}_{\breve{a}} &= R^{\hat{a}}_{\breve{a}\hat{e}}\, \omega^{\hat{e}}, \quad \omega^{\breve{a}}_{\hat{a}} = \Lambda^{\breve{a}}_{\hat{a}\hat{e}}\, \omega^{\hat{e}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4$$

де

$$\begin{cases} R^{\hat{a}}_{\breve{a}\hat{e}} = -R^{\hat{a}}_{\breve{a}\hat{e}}\, \omega^{n+1}_{n+1} + R^{\hat{a}}_{\breve{a}\hat{c}}\, \omega^{\hat{c}}_{\hat{e}} + R^{\hat{a}}_{\breve{e}\hat{e}}\, \omega^{\breve{e}}_{\breve{a}} - R^{\hat{c}}_{\breve{a}\hat{e}}\, \omega^{\hat{a}}_{\hat{c}} + R^{\hat{a}}_{\breve{a}\hat{e}\hat{c}}\, \omega^{\hat{c}}, \\ \Lambda^{\breve{a}}_{\hat{a}\hat{e}} = -\Lambda^{\breve{a}}_{\hat{a}\hat{e}}\, \omega^{n+1}_{n+1} + \Lambda^{\breve{a}}_{\hat{c}\hat{e}}\, \omega^{\hat{c}}_{\hat{a}} + \Lambda^{\breve{a}}_{\hat{a}\hat{c}}\, \omega^{\hat{c}}_{\hat{e}} - \Lambda^{\hat{e}}_{\hat{a}\hat{e}}\, \omega^{\breve{a}}_{\breve{e}} + \Lambda^{\breve{a}}_{\hat{a}\hat{e}\hat{c}}\, \omega^{\hat{c}}. \end{cases}$$

читывая (2.4) получим, что системы величин $\{P_{\alpha\beta,\hat{a}}\}, \{b_{\alpha\hat{a}}\}$ тапут тензорами.

§ 3. Геометрические объекты дифференцируемого отображения φ.

Рассмотрим системы величин

$$K_{\hat{a}} = a^{\hat{e}\hat{c}} P_{\hat{e}\hat{c},\hat{a}}; \quad N^{\breve{a}} = b^{\hat{a}\hat{e}} \Lambda^{\breve{a}}_{\hat{a}\hat{e}}, \quad C^{\hat{e}} = b^{\hat{a}\hat{e}} \cdot K_{\hat{a}}, \qquad (3.1)$$

$$R_{\breve{a}} = R^{\hat{a}}_{\breve{a}\hat{a}}; \quad R^{\hat{a}}_{\breve{a}} = C^{\hat{e}} R^{\hat{a}}_{\breve{a}\hat{e}}, \quad \mathcal{L}^{\hat{c}} = a^{\hat{a}\hat{c}} K_{\hat{a}}.$$

ни удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\delta K_{\hat{a}} = -K_{\hat{a}}\, \pi^{n+1}_{n+1} + K_{\hat{e}}\, \pi^{\hat{e}}_{\hat{a}}, \quad \delta N^{\breve{a}} = N^{\breve{a}}\, \pi^{n+1}_{n+1} - N^{\breve{e}}\, \pi^{\breve{a}}_{\breve{e}},$$

$$\delta C^{\hat{e}} = C^{\hat{e}}\, \pi^{n+1}_{n+1} - C^{\hat{c}}\, \pi^{\hat{e}}_{\hat{c}}, \quad \delta R_{\breve{a}} = -R_{\breve{a}}\, \pi^{n+1}_{n+1} + R_{\breve{e}}\, \pi^{\breve{e}}_{\breve{a}},$$

$$\delta R^{\hat{a}}_{\breve{a}} = R^{\hat{a}}_{\breve{e}}\, \pi^{\breve{e}}_{\breve{a}} - R^{\hat{c}}_{\breve{a}}\, \pi^{\hat{a}}_{\hat{c}}, \quad \delta \mathcal{L}^{\hat{c}} = \mathcal{L}^{\hat{c}} \left(\tfrac{2}{n}\pi^{\alpha}_{\alpha} - \pi^{n+1}_{n+1}\right) - \mathcal{L}^{\hat{e}}\, \pi^{\hat{c}}_{\hat{e}},$$

е $\pi^{\beta'}_{\alpha'}$ — значения форм Пфаффа $\omega^{\beta'}_{\alpha'}$ при фиксированных первич ых параметрах.

Тензоры $(R_{\breve{a}}, R^{\hat{a}}_{\breve{a}})$ определяют инвариантное оснащение поверх ости S_k. Нормаль первого рода поверхности определяется объ ктом $(R^{\hat{a}}_{\breve{a}})$. Её уравнения имеют вид:

$$x^{\hat{a}} - R^{\hat{a}}_{\breve{a}} \cdot x^{\breve{a}} = 0. \qquad (3.2)$$

ормаль второго рода размерности $(k-1)$ определяется объектом $(K_{\hat{a}})$. Её уравнения

$$x^{n+1} - K_{\hat{a}}\, x^{\hat{a}} = 0, \qquad (3.3$$
$$x^{\check{\alpha}} = 0.$$

Назовем вектор $(\mathcal{L}^{\hat{c}})$ главным. Он определяет в ассоциированно подпространстве инвариантную точку $\bar{A} = \mathcal{L}^{\hat{c}} \bar{A}_{\hat{c}}$. Действительно

$$\delta \bar{A} = \left(\frac{2}{n}\, \pi^{\alpha}_{\alpha} - \pi^{n+1}_{n+1}\right) \bar{A}. \qquad (3.4$$

Пересечение нормали второго рода поверхности S_h с гиперплоскостью $x^{n+1} = 0$ является $(h-1)$ мерной полярой $K_{\hat{a}}\, x^{\hat{a}} = 0$ $x^{\check{\alpha}} = 0,\ x^{n+1} = 0$ точки $\bar{A} = \mathcal{L}^{\hat{c}} \bar{A}_{\hat{c}}$ относительно ассоциированного подпространства.

Литература

1. В.С. Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом. сб., вып. 3 (Труды Томског университета, 168) 1963, 28–42.

2. В.С. Малаховский, Дифференциальная геометрия многообразий фигу и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара, М., ВИНИТИ АН СССР, 1969, 179–206.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Вып 2 1971

П О Х И Л А М.М.

ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Случай пары с общими гиперплоскостями)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается пара $T_{h,n}$ многообразий квадратичных элементов [1] с общими гиперплоскостями. Найден основной фундаментальный объект пары $T_{h,n}$. Исследованы различные поля геометрических объектов этой пары и геометрически охарактеризованы некоторые из них. Исследуется частный класс пар $T_{2,3}$ в P_3 (расслояемая пара $\overset{\circ}{T}_{2,3}$ конгруэнций коник).

§ 1. Основной внутренний объект пары многообразий $T_{h,n}$.

Пусть $(\Phi_1), (\Phi_2)$ – пара многообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 n-мерного проективного пространства P_n.

О п р е д е л е н и е 1. Парой $T_{h,n}$ многообразий $(\Phi_1), (\Phi_2)$ будем называть такую пару многообразий $(h,h,n)^2$ [1], у которой гиперплоскости соответствующих локальных квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 совпадают.

Проективное пространство P_n размерности $n \geqslant 3$ отнесем к под-