УДК 514.75

ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНОГО СКОМПОНОВАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$

Ю.И.Попов

(Калининградский государственный университет)

Изучается специальный класс трехсоставных распределени[й] проективного пространства [1] - скомпонованные (по терминоло[гии] А.П.Нордена [2]) трехсоставные распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^{\tau}$ [3] $(\tau < m < n-1)$. Распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ имеет следующую структур[у]: 1) оснащающее M-распределение скомпоновано из двух распред[е]лений $\mathcal{H}_\tau$ (распределение плоскостей $\Pi_\tau \stackrel{def}{=} \Lambda$ - Λ-распред[е]ление) и $\mathcal{H}_\ell$ (распределение плоскостей $L \stackrel{def}{=} \Pi_\ell$ - L-распре[]деление, $\ell = m-\tau$); 2) оснащающее H-распределение скомпонов[а]но из трех распределений $\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$, где распределение $\mathcal{H}_{n-m-1}$ - есть распределение характеристик $\mathcal{X}_{n-m-1}$ (Φ -рас[]пределение) гиперплоскостей [4]. Таким образом, при фиксации центра X распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ выполняются следующие условия инцидентности элементов трех основных структурных распределе[]ний $\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$:

$$[\Lambda, L] = M, \quad [M, \Phi] = H, \quad [\Lambda, L, \Phi] = H, \quad \Lambda \cap L = X, \quad \Phi \cap M = X.$$

Кроме того, потребуем, чтобы при смещении центра X вдоль кривых, принадлежащих одному из распределений $\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$, соответствующая этому смещению характеристика гиперплоскости $H_{n-1}(X)$ в каждом центре X была натянута на линейные элеме[н]ты двух других распределений.

Относительно репера нулевого порядка $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ имеют вид [3, §1] (з[а]мыкания уравнений опускаются):

$$\begin{cases} \omega^n_p = \Lambda^n_{p\hat{q}}\,\omega^{\hat{q}}_0, & \omega^\alpha_p = \Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^i_p = \Lambda^i_{p\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \\ \omega^n_i = M^n_{i\hat{j}}\,\omega^{\hat{j}}_0, & \omega^\alpha_i = M^\alpha_{i\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^p_i = M^p_{i\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \\ \omega^n_\alpha = H^n_{\alpha\hat{\beta}}\,\omega^{\hat{\beta}}_0, & \omega^p_\alpha = H^p_{\alpha\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^i_\alpha = H^i_{\alpha\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0. \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

Для регулярного скомпонованного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, следуя работам А.В.Столярова [5] - [6] , вводится во второй дифференциальной окрестности двойственный ему образ $\bar{\mathcal{H}}^{\tau}_{m,n-1} \subset \bar{P}_{[n]}$ [о]тносительно инволютивного преобразования $\mathcal{I}$ (1.7). Будем в [э]том случае говорить, что найден двойственный образ в смысле [А].В.Столярова. Выясняется, что распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ порожда[е]т пространства $\overset{1}{A}_{n,\tau}$; $\overset{1}{A}_{n,\ell}$; $\overset{1}{A}_{n,n-m-1}$ с линейной связностью аф[ф]инного типа и соответственно двойственные им в смысле А.В. [С]толярова пространства $\overset{1}{\bar{A}}_{n,\tau}$; $\overset{1}{\bar{A}}_{n,\ell}$; $\overset{1}{\bar{A}}_{n,n-m-1}$. Для внутренних проективных связностей $\Gamma, \gamma, \vartheta$, ассоциированных с $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$-распределением, найдены двойственные в смысле А.В.Столярова связности $\bar{\Gamma}, \bar{\gamma}, \bar{\vartheta}$. Доказано, что к регулярному скомпонованному распределению $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$ в дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ его образующего элемента внутренним инвариантным образом присоединяются пространства проективной связности $\bar{P}_{n,\tau}$, $\bar{P}_{n,\ell}$; $\bar{P}_{n,n-m-1}$, двойственные соответственно пространствам про[ек]тивной связности $P_{n,\tau}$; $P_{n,\ell}$; $P_{n,n-m-1}$ относительно инволютивного преобразования $\mathcal{I}$ (1.7).

Во всей работе используется следующая схема индексов:

$\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \ldots = \overline{1,n}$; $\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{\mathcal{L}}, \ldots = \overline{0,n}$; $p, q, \tau, s, t = \overline{1,\tau}$;

$\bar{p}, \bar{q}, \bar{\tau}, \bar{s}, \bar{t} = \overline{0,\tau}$; $i, j, k, \ell, h = \overline{\tau+1,m}$; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{\ell}, \bar{h} = 0, \overline{\tau+1,m}$;

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{\ell} = \overline{\tau+1,m}, n$; $\hat{p}, \hat{q}, \hat{s}, \hat{t} = \overline{1,\tau}, n$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,n-1}$; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} = 0, \overline{m+1,n}$;

$u, v, w = \overline{\tau+1,n-1}$; $\varepsilon, \varrho, \sigma, \tau, \delta = \overline{1,n-1}$; $a, b, c, d = \overline{1,m}$; $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{\tau+1,n}$;

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{1,m}, n$.

§ 1. О двойственных аффинных связностях распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$

1. Пусть базисное распределение $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ оснащено в смысле А.П.Нордена [7] полями квазитензоров $\{\nu^p_n\}, \{\nu^0_p\}$. Можно показать, что система форм

$$\begin{cases} \overset{1}{\theta}{}^p_0 = \omega^p_0 - \nu^p_n\,\omega^n_0, \\ \overset{1}{\theta}{}^p_q = \omega^p_q - \delta^p_q\,\omega^0_0 + \delta^p_q\,\nu^0_t\,\omega^t_0 - \delta^p_q\,\nu^t_n\,\nu^0_t\,\omega^n_0 - H^p_{\alpha q}\,\omega^\alpha_0 - M^p_{iq}\,\omega^i_0 - \\ \quad - \nu^p_n\,\omega^n_q - (\nu^p_{nq} - \Lambda^h_{sq}\,\nu^s_h\,\nu^p_n + \nu^p_n\,\nu^0_q)\,\omega^n_0 + \nu^0_q\,\omega^p_0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [8] , [9]:

$$\mathcal{D}\overset{1}{\theta}{}^p_q = \overset{1}{\theta}{}^s_q \wedge \overset{1}{\theta}{}^p_s + \frac{1}{2}\,\overset{1}{\tau}{}^p_{q\mathcal{K}\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0 \wedge \omega^{\mathcal{J}}_0. \qquad (1.2)$$

Следовательно, система форм $\{\overset{1}{\theta}{}^{p}_{q}\}$ (1.1) определяет пространство $\overset{1}{A}_{n,\tau}$ с линейной связностью $\overset{1}{\nabla}$ аффинного типа.

Далее, аналогично, убеждаемся, что если распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ оснащено полями квазитензоров $\{\nu^{0}_{i}\}, \{\nu^{i}_{n}\}$ (геометрически это означает, что распределение $\mathcal{H}_{\ell} \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ оснащено в смысле А.П.Нордена [71]), то система форм

$$\begin{cases} \overset{1}{\theta}{}^{i}_{0} = \omega^{i}_{0} - \nu^{i}_{n}\,\omega^{n}_{0}, \\ \overset{1}{\theta}{}^{i}_{j} = \omega^{i}_{j} - \delta^{i}_{j}\,\omega^{0}_{0} + \delta^{i}_{j}\,\omega^{k}_{0}\,\nu^{0}_{k} - \delta^{i}_{j}\,\nu^{k}_{0}\,\nu^{0}_{k} - H^{i}_{\alpha j}\,\omega^{\alpha}_{0} - \Lambda^{i}_{pj}\,\omega^{p}_{0} - \nu^{i}_{n}\,\omega^{n}_{j} - \\ \quad - (\nu^{i}_{nj} - \Lambda^{n}_{kj}\,\nu^{k}_{n}\,\nu^{i}_{n} + \nu^{i}_{n}\,\nu^{0}_{j})\,\omega^{n}_{0} + \nu^{0}_{j}\,\omega^{i}_{0} \end{cases} \qquad (1.3)$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева

$$\mathcal{D}\overset{1}{\theta}{}^{i}_{j} = \overset{1}{\theta}{}^{k}_{j} \wedge \overset{1}{\theta}{}^{i}_{k} + \tfrac{1}{2}\,\overset{1}{R}{}^{i}_{j\mathcal{K}\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{K}}_{0} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{0}. \qquad (1.4)$$

Таким образом, система форм $\{\overset{1}{\theta}{}^{i}_{j}\}$ (1.3) определяет пространство $\overset{1}{A}_{n,\ell}$ с линейной связностью $\overset{1}{\gamma}$ аффинного типа. Наконец, система форм $\{\overset{1}{\theta}{}^{\alpha}_{\beta}\}$, где

$$\begin{cases} \overset{1}{\theta}{}^{\alpha}_{0} = \omega^{\alpha}_{0} - \nu^{\alpha}_{n}\,\omega^{n}_{0}, \\ \overset{1}{\theta}{}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{0}_{0} + \delta^{\alpha}_{\beta}\,\nu^{0}_{\gamma}\,\omega^{\gamma}_{0} - \delta^{\alpha}_{\beta}\,\nu^{\gamma}_{n}\,\nu^{0}_{\gamma}\,\omega^{n}_{0} - \nu^{\alpha}_{n}\,\omega^{n}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{p\beta}\,\omega^{p}_{0} - \\ \quad - M^{\alpha}_{i\beta}\,\omega^{i}_{0} - (\nu^{\alpha}_{n\beta} - H^{n}_{\gamma\beta}\,\nu^{\alpha}_{n}\,\nu^{\gamma}_{n} + \nu^{\alpha}_{n}\,\nu^{0}_{\beta})\,\omega^{n}_{0} + \nu^{0}_{\beta}\,\omega^{\alpha}_{0}, \end{cases} \qquad (1.5)$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева

$$\mathcal{D}\overset{1}{\theta}{}^{\alpha}_{\beta} = \overset{1}{\theta}{}^{\gamma}_{\beta} \wedge \overset{1}{\theta}{}^{\alpha}_{\gamma} + \tfrac{1}{2}\,\overset{1}{R}{}^{\alpha}_{\beta\mathcal{K}\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{K}}_{0} \wedge \omega^{\mathcal{L}}_{0}. \qquad (1.6)$$

В этом случае поля квазитензоров $\{\nu^{0}_{\alpha}\}, \{\nu^{\alpha}_{n}\}$ задают нормализацию А.П.Нордена распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$. Следовательно, мы имеем еще одно пространство $\overset{1}{A}_{n,n-m-1}$ с линейной связностью $\overset{1}{\Gamma}$ аффинного типа. Ясно, что в качестве полей квазитензоров $\{\nu^{0}_{p}\}$, $\{\nu^{p}_{n}\}, \{\nu^{0}_{i}\}, \{\nu^{\alpha}_{n}\}, \{\nu^{0}_{i}\}, \{\nu^{i}_{n}\}$ в формулах (1.1), (1.3), (1.5) можно взять любые внутренние инвариантные поля квазитензоров, введенных нами в работах [3, §2], [4, §§2-5].

2. Двойственную теорию гиперполосных распределений (гиперполос) в проективном пространстве и в пространстве проективной связности рассмотрел А.В.Столяров [5] - [6]. Применим математический аппарат двойственной теории А.В.Столярова [5] [6] к изучению регулярных скомпонованных распределений $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$.

Рассмотрим систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\bar{\omega}^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{K}}}$:

$$\begin{cases} \bar{\omega}^{0}_{0} = \omega^{0}_{0} - \frac{1}{n+1}(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{K}} + \tilde{M}_{\mathcal{K}} + \tilde{H}_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_{0}, \quad \bar{\omega}^{n}_{0} = \omega^{n}_{0}, \\ \bar{\omega}^{p}_{0} = \omega^{p}_{0} + \Lambda^{pq}_{n}\,\Lambda^{n}_{qn}\,\omega^{n}_{0}, \quad \bar{\omega}^{i}_{0} = \omega^{i}_{0} + M^{ij}_{n}\,M^{n}_{jn}\,\omega^{n}_{0}, \\ \bar{\omega}^{\alpha}_{0} = \omega^{\alpha}_{0} + H^{\alpha\beta}_{n}\,H^{n}_{\beta n}\,\omega^{n}_{0}, \quad \bar{\omega}^{0}_{n} = \omega^{0}_{n}, \quad \bar{\omega}^{p}_{n} = -\Lambda^{pq}_{n}\,\omega^{0}_{q}, \\ \bar{\omega}^{j}_{n} = -M^{ji}_{n}\,\omega^{0}_{i}, \quad \bar{\omega}^{\beta}_{n} = -H^{\beta\alpha}_{n}\,\omega^{0}_{\alpha}, \quad \bar{\omega}^{0}_{p} = \Lambda^{n}_{qp}\,\omega^{q}_{n}, \\ \bar{\omega}^{n}_{n} = \omega^{n}_{n} - \frac{1}{n+1}(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{K}} + \tilde{M}_{\mathcal{K}} + \tilde{H}_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_{0}, \quad \bar{\omega}^{i}_{p} = -\Lambda^{n}_{qp}\,M^{ij}_{n}\,\omega^{q}_{j}, \\ \bar{\omega}^{n}_{p} = -\Lambda^{n}_{qp}\,\omega^{q}_{0}, \quad \bar{\omega}^{\alpha}_{p} = -\Lambda^{n}_{qp}\,H^{\alpha\beta}_{n}\,\omega^{q}_{n}, \quad \bar{\omega}^{0}_{i} = M^{n}_{ji}\,\omega^{j}_{n}, \\ \bar{\omega}^{\ell}_{p} = \omega^{\ell}_{p} + \Lambda^{\ell q}_{n}\,\Lambda^{n}_{qp\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_{0} - \frac{1}{n+1}\,\delta^{\ell}_{p}\,(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{K}} + \tilde{M}_{\mathcal{K}} + \tilde{H}_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_{0}, \\ \bar{\omega}^{k}_{i} = \omega^{k}_{i} + M^{k\ell}_{n}\,\Lambda^{n}_{\ell i\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_{0} - \frac{1}{n+1}\,\delta^{k}_{i}\,(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{K}} + \tilde{M}_{\mathcal{K}} + \tilde{H}_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_{0}, \\ \bar{\omega}^{p}_{i} = -M^{n}_{ji}\,\Lambda^{pq}_{n}\,\omega^{j}_{q}, \quad \bar{\omega}^{\alpha}_{i} = -M^{n}_{ji}\,H^{\alpha\beta}_{n}\,\omega^{j}_{\beta}, \\ \bar{\omega}^{n}_{i} = -M^{n}_{ji}\,\omega^{j}_{0}, \quad \bar{\omega}^{0}_{\alpha} = H^{n}_{\beta\alpha}\,\omega^{\beta}_{n}, \quad \bar{\omega}^{i}_{\alpha} = -M^{ij}_{n}\,H^{n}_{\beta\alpha}\,\omega^{\beta}_{j}, \\ \bar{\omega}^{p}_{\alpha} = -\Lambda^{pq}_{n}\,H^{n}_{\beta\alpha}\,\omega^{\beta}_{q}, \quad \bar{\omega}^{n}_{\alpha} = -H^{n}_{\beta\alpha}\,\omega^{\beta}_{0}, \\ \bar{\omega}^{\beta}_{\alpha} = \omega^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{n+1}\,\delta^{\beta}_{\alpha}\,(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{K}} + \tilde{M}_{\mathcal{K}} + \tilde{H}_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_{0} + H^{\beta\gamma}_{n}\,H^{n}_{\gamma\alpha\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_{0}. \end{cases} \qquad (1.7)$$

Отметим, что формы $\bar{\omega}^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{K}}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\bar{\mathcal{J}}}\}$:

$$d\tau_{\bar{\mathcal{J}}} = \bar{\omega}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}}\,\tau_{\bar{\mathcal{K}}}, \qquad (1.8)$$

где

$$\begin{cases} \tau_{0} = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda\cdot M\cdot H}}\,[A_0, A_p, A_i, A_\alpha], \quad \tau_{n} = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda\cdot M\cdot H}}\,[A_n, A_p, A_i, A_\alpha], \\ \tau_{p} = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda\cdot M\cdot H}} \displaystyle\sum_{q} \Lambda^{n}_{qp}\,[A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, A_n, A_{q+1}, \ldots, A_\tau, A_i, A_\alpha], \\ \tau_{i} = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda\cdot M\cdot H}} \displaystyle\sum_{j} M^{n}_{ji}\,[A_0, A_p, A_{\tau+1}, \ldots, A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, \ldots, A_m, A_\alpha], \\ \tau_{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda\cdot M\cdot H}} \displaystyle\sum_{\beta} H^{n}_{\beta\alpha}\,[A_0, A_i, A_p, A_{m+1}, \ldots A_{\beta-1}, A_n, A_{\beta+1}, \ldots, A_{n-1}]. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Докажем, что преобразование $\mathfrak{P}: \omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}} \to \bar{\omega}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}}$ форм проективного пространства по закону (1.7) является инволютивным, т.е.

9 Зак. 1399

$\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{-1}$. Действительно, прежде всего из формул

$$\bar{\omega}_p^n=\bar{\Lambda}_{p\hat{q}}^n\,\bar{\omega}_0^{\hat{q}},\quad \bar{\omega}_i^n=\bar{M}_{i\hat{j}}^n\,\omega_0^{\hat{j}},\quad \bar{\omega}_\alpha^n=\bar{H}_{\alpha\hat{\beta}}^n\,\bar{\omega}_0^{\hat{\beta}}$$

согласно соответственно уравнениям

$$\bar{\omega}_p^n=-\Lambda_{qp}^n\,\omega_0^q,\quad \bar{\omega}_\alpha^n=-H_{\beta\alpha}^n\,\omega_0^\beta,\quad \bar{\omega}_i^n=-M_{ji}^n\,\omega_0^j$$

из системы (1.7) находим:

$$\bar{\Lambda}_{pq}^n=-\Lambda_{qp}^n,\quad \bar{M}_{ij}^n=-M_{ji}^n,\quad \bar{H}_{\alpha\beta}^n=-H_{\beta\alpha}^n, \tag{1.10}$$

$$\bar{\Lambda}_{pn}^n=\Lambda_{qp}^n\Lambda_n^{qs}\Lambda_{sn}^n,\quad \bar{M}_{in}^n=M_{ji}^n M_n^{jk}M_{kn}^n,\quad \bar{H}_{\alpha n}^n=H_{\beta\alpha}^n H_n^{\beta\gamma}H_{\gamma n}^n. \tag{1.11}$$

В силу формул (1.10) и [3, (1.28)] имеем

$$\bar{\Lambda}_n^{pq}=-\Lambda_n^{qp},\quad \bar{M}_n^{ij}=-M_n^{ji},\quad \bar{H}_n^{\alpha\beta}=-H_n^{\beta\alpha}. \tag{1.12}$$

При преобразовании $\mathfrak{J}$ (1.7) дифференциальные уравнения [3, (1.2)]

$$\nabla\Lambda_{pq}^n+\Lambda_{pq}^n\,\omega_0^0=\Lambda_{pq\varkappa}^n\,\omega_0^\varkappa$$

принимают следующий вид:

$$d\bar{\Lambda}_{pq}^n-\bar{\Lambda}_{sq}^n\bar{\omega}_p^s-\bar{\Lambda}_{ps}^n\bar{\omega}_q^s+\bar{\Lambda}_{pq}^n(\bar{\omega}_n^n+\bar{\omega}_0^0)=\bar{\Lambda}_{pq\varkappa}^n\,\omega_0^\varkappa \tag{1.13}$$

Из (1.13), используя формулы (1.7), получаем

$$\begin{cases}\bar{\Lambda}_{pqs}^n=\Lambda_{fp}^n\Lambda_n^{ft}\Lambda_{tqs}^n,\quad \bar{\Lambda}_{pqi}^n=\Lambda_{sp}^n\Lambda_n^{st}\Lambda_{tqi}^n,\quad \bar{\Lambda}_{pq\alpha}^n=\Lambda_{sp}^n\Lambda_n^{st}\Lambda_{tq\alpha}^n,\\ \bar{\Lambda}_{pqn}^n=\Lambda_{sp}^n\Lambda_n^{st}\Lambda_{tqn}^n-\bar{\Lambda}_{pqs}^n\Lambda_n^{st}\Lambda_{tn}^n-\bar{\Lambda}_{pqi}^n M_n^{ik}M_{kn}^n-\bar{\Lambda}_{pq\alpha}^n H_n^{\alpha\beta}H_{\beta n}^n.\end{cases} \tag{1.14}$$

Аналогично, из дифференциальных уравнений [3, (1.4), (1.6)], записанных относительно тангенциального репера (1.9), (1.10), с использованием формул (1.7) соответственно находим

$$\begin{cases}\bar{M}_{ijp}^n=M_{ki}^n M_n^{kl}M_{ljp}^n,\quad \bar{M}_{ijk}^n=M_{ki}^n M_n^{kl}M_{ljk}^n,\quad \bar{M}_{ij\alpha}^n=M_{ki}^n M_n^{kl}M_{lj\alpha}^n,\\ \bar{M}_{ijn}^n=M_{ki}^n M_n^{kl}M_{ljn}^n-\bar{M}_{ijp}^n\Lambda_n^{pq}\Lambda_{qn}^n-\bar{M}_{ijk}^n M_n^{kl}M_{ln}^n-\bar{M}_{ij\alpha}^n H_n^{\alpha\beta}H_{\beta n}^n,\\ \bar{H}_{\alpha\beta p}^n=H_{\varepsilon\alpha}^n H_n^{\varepsilon\delta}H_{\delta\beta p}^n,\quad \bar{H}_{\alpha\beta i}^n=H_{\varepsilon\alpha}^n H_n^{\varepsilon\delta}H_{\delta\beta i}^n,\quad \bar{H}_{\alpha\beta\gamma}^n=H_{\varepsilon\alpha}^n H_n^{\varepsilon\delta}H_{\delta\beta\gamma}^n,\\ \bar{H}_{\alpha\beta n}^n=H_{\varepsilon\alpha}^n H_n^{\varepsilon\delta}H_{\delta\beta n}^n-\bar{H}_{\alpha\beta p}^n\Lambda_n^{pq}\Lambda_{qn}^n-\bar{H}_{\alpha\beta i}^n M_n^{ij}M_{jn}^n-\bar{H}_{\alpha\beta\gamma}^n H_n^{\gamma\delta}H_{\delta n}^n.\end{cases} \tag{1.15}$$

Наконец, из соотношений [3, (2.15)]

$$\tilde{\Lambda}_\varkappa=\Lambda_n^{qp}\Lambda_{pq\varkappa},\quad \tilde{M}_\varkappa=M_n^{ji}M_{ij\varkappa},\quad \tilde{H}_\varkappa=H_n^{\beta\alpha}H_{\alpha\beta\varkappa}.$$

Согласно формулам (1.12), (1.14), (1.15) находим еще одну группу необходимых нам соотношений между объектами, отнесенными к различным реперам $\{\tau^{\bar{\jmath}}\}$ и $\{A_{\bar{\jmath}}\}$:

$$\begin{cases}\bar{\tilde{\Lambda}}_p=-\tilde{\Lambda}_p,\quad \bar{\tilde{\Lambda}}_n=-\tilde{\Lambda}_n+\tilde{\Lambda}_p\Lambda_n^{pq}\Lambda_{qp}^n+\tilde{\Lambda}_i M_n^{ik}M_{kn}^n+\tilde{\Lambda}_\alpha H_n^{\alpha\beta}H_{\beta n}^n,\\ \bar{\tilde{M}}_p=-\tilde{M}_p,\quad \bar{\tilde{M}}_n=-\tilde{M}_n+\tilde{M}_p\Lambda_n^{pq}\Lambda_{qp}^n+\tilde{M}_i M_n^{ik}M_{kn}^n+\tilde{M}_\alpha H_n^{\alpha\beta}H_{\beta n}^n,\\ \bar{\tilde{H}}_p=-\tilde{H}_p,\quad \bar{\tilde{H}}_n=-\tilde{H}_n+\tilde{H}_\alpha H_n^{\alpha\beta}H_{\beta n}^n+\tilde{H}_i M_n^{ik}M_{kn}^n+\tilde{H}_p\Lambda_n^{pq}\Lambda_{qn}^n.\end{cases} \tag{1.16}$$

Теперь, используя соотношения (1.10)–(1.16) из формул (1.7), получаем соотношения, определяющие преобразование $\mathfrak{J}^{-1}$:

$$\begin{cases}\omega_0^0=\bar{\omega}_0^0-\frac{1}{n+1}(\bar{\tilde{\Lambda}}_\varkappa+\bar{\tilde{M}}_\varkappa+\bar{\tilde{H}}_\varkappa)\omega_0^\varkappa,\quad \omega_0^n=\bar{\omega}_0^n,\quad \omega_n^\beta=-\bar{H}_n^{\beta\alpha}\bar{\omega}_0^\alpha,\\ \omega_0^p=\bar{\omega}_0^p+\bar{\Lambda}_n^{pq}\bar{\Lambda}_{qn}^n\bar{\omega}_0^n,\quad \omega_0^i=\bar{\omega}_0^i+\bar{M}_n^{ij}\bar{M}_{jn}^n\bar{\omega}_0^n,\quad \omega_n^0=\bar{\omega}_n^0,\\ \omega_0^\alpha=\bar{\omega}_0^\alpha+\bar{H}_n^{\alpha\beta}\bar{H}_{\beta n}^n\bar{\omega}_0^n,\quad \omega_n^p=-\Lambda_n^{pq}\bar{\omega}_q^0,\quad \omega_n^j=-\bar{\Lambda}_n^{ji}\bar{\omega}_i^0,\quad \omega_p^0=\bar{\Lambda}_{qp}^n\bar{\omega}_n^q,\\ \omega_n^n=\bar{\omega}_n^n-\frac{1}{n+1}(\bar{\tilde{\Lambda}}_\varkappa+\bar{\tilde{M}}_\varkappa+\bar{\tilde{H}}_\varkappa)\bar{\omega}_0^\varkappa,\quad \omega_p^i=-\bar{\Lambda}_{qp}^n\bar{\Lambda}_n^{ij}\bar{\omega}_j^q,\quad \omega_p^n=-\bar{\Lambda}_{qp}^n\bar{\omega}_0^q,\\ \omega_i^0=\bar{\Lambda}_{ji}^n\bar{\omega}_n^j,\quad \omega_p^\alpha=-\bar{\Lambda}_{qp}^n\bar{H}_n^{\alpha\beta}\bar{\omega}_\beta^q,\quad \omega_i^p=-\bar{M}_{ji}^n\bar{\Lambda}_n^{pq}\bar{\omega}_q^j,\\ \omega_p^f=\bar{\omega}_p^f+\bar{\Lambda}_n^{fq}\bar{\Lambda}_{qp\varkappa}^n\bar{\omega}_0^\varkappa-\frac{1}{n+1}\delta_p^f(\bar{\tilde{\Lambda}}_\varkappa+\bar{\tilde{M}}_\varkappa+\bar{\tilde{H}}_\varkappa)\bar{\omega}_0^\varkappa,\\ \omega_i^k=\bar{\omega}_i^k+\bar{\Lambda}_n^{kl}\bar{\Lambda}_{li\varkappa}^n\omega_0^\varkappa-\frac{1}{n+1}\delta_i^k(\bar{\tilde{\Lambda}}_\varkappa+\bar{\tilde{M}}_\varkappa+\bar{\tilde{H}}_\varkappa)\bar{\omega}_0^\varkappa,\\ \omega_i^\alpha=-\bar{M}_{ji}^n\bar{H}_n^{\alpha\beta}\bar{\omega}_\beta^j,\quad \omega_i^n=-\bar{\Lambda}_{ji}^n\bar{\omega}_0^j,\quad \omega_\alpha^0=\bar{H}_{\beta\alpha}^n\bar{\omega}_n^\beta,\\ \omega_\alpha^i=-\bar{M}_n^{ij}\bar{H}_{\beta\alpha}^n\bar{\omega}_j^\beta,\quad \omega_\alpha^p=-\bar{\Lambda}_n^{pq}\bar{H}_{\beta\alpha}^n\bar{\omega}_q^\beta,\quad \omega_\alpha^n=-\bar{H}_{\beta\alpha}^n\bar{\omega}_0^\beta,\\ \omega_\alpha^\beta=\bar{\omega}_\alpha^\beta-\frac{1}{n+1}\delta_\alpha^\beta(\bar{\tilde{\Lambda}}_\varkappa+\bar{\tilde{M}}_\varkappa+\bar{\tilde{H}}_\varkappa)\omega_0^\varkappa+\bar{H}_n^{\beta\gamma}\bar{H}_{\gamma\alpha\varkappa}^n\bar{\omega}_0^\varkappa.\end{cases} \tag{1.17}$$

Из формул (1.7) и (1.17) следует, что $\mathfrak{J}\equiv\mathfrak{J}^{-1}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Регулярное скомпонованное распределение $\mathcal{H}_{m,n-1}^r\subset P_n$ во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует проективное пространство $\bar{P}_n$, двойственное исходному проективному пространству P_n относительно инволютивного преобразования $\mathfrak{J}$ форм $\omega_\varkappa^{\jmath}$ по закону (1.7).

Дифференциальные уравнения геометрического образа

$\overline{\mathcal{H}}^{\tau}_{m,n-1} \subset \overline{P}_n$, двойственного данному регулярному скомпонованному распределению $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$, согласно доказанной теореме 1 имеют вид, аналогичный (I):

$$\begin{cases} \overline{\omega}^n_p = \overset{1}{\Lambda}{}^n_{p\hat{q}} \overline{\omega}^{\hat{q}}_0, & \overline{\omega}^{\alpha}_p = \overline{\Lambda}^{\alpha}_{pk} \overline{\omega}^k_0, \quad \overline{\omega}^i_p = \overline{\Lambda}^i_{pk} \overline{\omega}^k_0, \\ \overline{\omega}^n_i = \overline{M}^n_{i\hat{q}} \overline{\omega}^{\hat{q}}_0, & \overline{\omega}^{\alpha}_i = \overline{M}^{\alpha}_{ik} \overline{\omega}^k_0, \quad \overline{\omega}^p_i = \overline{M}^p_{ik} \overline{\omega}^k_0, \\ \overline{\omega}^n_{\alpha} = \overline{H}^n_{\alpha\beta} \overline{\omega}^{\beta}_0, & \overline{\omega}^p_{\alpha} = \overline{H}^p_{\alpha k} \overline{\omega}^k_0, \quad \overline{\omega}^i_{\alpha} = \overline{H}^i_{\alpha k} \overline{\omega}^k_0, \end{cases} \tag{1.18}$$

где компоненты фундаментального объекта 1-го порядка

$$\overline{\Gamma}_1 = \{ \overline{\Lambda}^n_{p\hat{q}}, \overline{\Lambda}^{u}_{pk}, \overline{M}^A_{ik}, \overline{H}^n_{\alpha\beta}, \overline{H}^a_{\alpha k} \}$$

подчинены условиям [3, (1.2)-(1.14)] аналогичного строения (только здесь входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху).

3. Все построения работ [3], [4] можно полностью перенести для двойственного образа $\overline{\mathcal{H}}^{\tau}_{m,n-1} \subset \overline{P}_n$. Например, проведем построения двойственной нормализации по А.П.Нордену (нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна) для геометрического образа $\overline{\mathcal{H}}^{\tau}_{m,n-1} \subset \overline{P}_n$ и построения двойственных линейных связностей аффинного типа, ассоциированных с $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$.

Каждая из систем функций

$$\begin{cases} \overline{\nu}^p_n \overset{def}{=} -\Lambda^{pq}_n \nu^0_q, \quad \overline{\nu}^0_p \overset{def}{=} \Lambda^n_{qp} \nu^q_n, \quad \overline{\nu}^i_n \overset{def}{=} -M^{ik}_n \nu^0_k, \\ \overline{\nu}^0_i \overset{def}{=} \Lambda^n_{ki} \nu^k_n, \quad \overline{\nu}^{\alpha}_n \overset{def}{=} -H^{\alpha\beta}_n \nu^0_{\beta}, \quad \overline{\nu}^0_{\alpha} \overset{def}{=} H^n_{\beta\alpha} \nu^{\beta}_n \end{cases} \tag{1.19}$$

образует квазитензор, двойственный соответствующему относительно преобразования $\mathfrak{D}$ (1.7). Действительно, с помощью соотношений [3, (1.18),(1.28)], преобразуя уравнения [3, (3.3) (3.7), (3.8), (3.10)] по закону (1.7), приходим соответственно к следующим дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют величины (1.19):

$$\begin{cases} \nabla\overline{\nu}^p_n + \overline{\omega}^p_n = \nu^p_{nk} \omega^k_0, \quad \nabla\overline{\nu}^0_p + \overline{\omega}^0_p = \overline{\nu}^0_{pk} \overline{\omega}^k_0, \quad \nabla\overline{\nu}^i_n + \overline{\omega}^i_n = \overline{\nu}^i_{nk} \overline{\omega}^k_0, \\ \nabla\overline{\nu}^0_i + \overline{\omega}^0_i = \overline{\nu}^0_{ik} \omega^k_0, \quad \nabla\overline{\nu}^{\alpha}_n + \overline{\omega}^{\alpha}_n = \overline{\nu}^{\alpha}_{nk} \overline{\omega}^k_0, \quad \nabla\overline{\nu}^0_{\alpha} + \overline{\omega}^0_{\alpha} = \overline{\nu}^0_{\alpha k} \omega^k_0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Таким образом, всякая нормализация распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ индуцирует двойственную ее нормализацию. При этом оснащающие объекты связаны соотношениями (1.19). Отметим, что, зная закон охвата нормали первого (второго) рода $\{\nu^{\sigma}_n\}$ ($\{\nu^0_{\sigma}\}$) распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$, можно построить внутренним образом определенную нормаль второго (первого) рода распределения $\overline{\mathcal{H}}^{\tau}_{m,n-1} \subset \overline{P}_n$, используя при этом двойственную его теорию, по следующему правилу [5]: строим охват квазитензора $\{\overline{\nu}^{\sigma}_n\}$ ($\{\overline{\nu}^0_{\sigma}\}$) двойственного образа $\overline{\mathcal{H}}^{\tau}_{m,n-1} \subset \overline{P}_n$, аналогичный охвату $\{\nu^{\sigma}_n\}$ ($\{\nu^0_{\sigma}\}$), после чего по закону (1.19) найдем соответствующую нормаль $\{\nu^0_{\sigma}\}$ ($\{\nu^{\sigma}_n\}$).

Системы форм $\{\overset{2}{\theta}{}^{\hat{p}}_{\hat{q}}\}, \{\overset{2}{\theta}{}^i_j\}, \{\overset{2}{\theta}{}^{\alpha}_{\beta}\}$, построенные по закону соответственно вида (1.1), (1.3), (1.5) (в этом случае входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху), удовлетворяют (каждая) структурным уравнениям Картана-Лаптева и определяют соответственно пространства $\overset{2}{A}_{n,\tau}; \overset{2}{A}_{n,e}; \overset{2}{A}_{n,n-m-1}$ с линейной связностью аффинного типа, двойственные соответствующим пространствам $\overset{1}{A}_{n,\tau}; \overset{1}{A}_{n,e}; \overset{1}{A}_{n,n-m-1}$. Отсюда следует

Т е о р е м а 2. С регулярным скомпонованным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$ в дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ его образующего элемента ассоциируются пространства $\overset{2}{A}_{n,\tau}; \overset{2}{A}_{n,e}; \overset{2}{A}_{n,n-m-1}$ с линейной связностью аффинного типа, двойственные соответственно пространствам $\overset{1}{A}_{n,\tau}; \overset{1}{A}_{n,e}; \overset{1}{A}_{n,n-m-1}$ относительно преобразования $\mathfrak{D}$ (1.7). Порядок t дифференциальной окрестности определяется порядком квазитензоров $\{\nu^p_n\}, \{\nu^i_n\}, \{\nu^{\alpha}_n\}$, участвующих в охватах.

§ 2. О двойственных проективных связностях регулярного скомпонованного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$

1. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,\tau}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями — τ-мерные центропроективные пространства — плоскости Π_{τ}, т.е. соответствующие τ-мерные линейные элементы базисного распределения $\mathcal{H}_{\tau} \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ [4].

Проективную связность Γ пространства $P_{n,\tau}$ определим при помощи системы форм $\{\hat{\omega}^{\hat{p}}_{\hat{q}}\}$, где

$$\hat{\omega}^{\hat{p}}_{\hat{q}} = \omega^{\hat{p}}_{\hat{q}} - \Gamma^{\hat{p}}_{\hat{q}k} \omega^k_0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющих структурным уравнениям [10], [11]:

$$\mathcal{D}\omega^J_0 = \omega^L_0 \wedge \omega^J_L + \omega^0_0 \wedge \omega^J_0, \quad \mathcal{D}\hat{\omega}^{\hat{p}}_{\hat{q}} = \hat{\omega}^{\hat{s}}_{\hat{q}} \wedge \hat{\omega}^{\hat{p}}_{\hat{s}} + \omega^k_0 \wedge \Delta\Gamma^{\hat{p}}_{\hat{q}k}, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa} = d\Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa} - \Gamma^{\bar p}_{\bar s \varkappa}\omega^{\bar s}_{\bar q} + \Gamma^{\bar s}_{\bar q \varkappa}\omega^{\bar p}_{\bar s} - \Gamma^{\bar p}_{\bar q \gamma}\omega^{\gamma}_{\varkappa} + \Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa}\omega^0_0 +$$
$$+ \Lambda^{\hat u}_{\bar q \varkappa}\omega^{\bar p}_{\hat u} - \Gamma^{\bar p}_{\bar s L}\Gamma^{\bar s}_{\bar q \varkappa}\omega^L_0, \quad \Lambda^{\hat u}_{0\varkappa} = \delta^{\hat u}_{\varkappa}. \tag{2.3}$$

Совокупность величин $\Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa}$, следуя работе [11], назовем объектом проективной связности пространства $P_{n,\tau}$.

Формы $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ определяют проективную связность в слоях (плоскостях Π_τ распределения $\mathcal{H}_\tau$) пространства проективной связности $P_{n,\tau}$ тогда и только тогда, когда [8], [10], [11]

$$\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa} = \Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa L}\omega^L_0. \tag{2.4}$$

При этом структурные уравнения для слоевых форм $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ пространства $P_{n,\tau}$ имеют вид

$$\mathcal{D}\hat\omega^{\bar p}_{\bar q} = \omega^{\bar s}_{\bar q}\wedge\omega^{\bar p}_{\bar s} + \frac{1}{2}R^{\bar p}_{\bar q \varkappa L}\omega^{\varkappa}_0\wedge\omega^L_0, \tag{2.5}$$

где

$$R^{\bar p}_{\bar q \varkappa L} = 2\Gamma^{\bar p}_{\bar q [\varkappa L]} \tag{2.6}$$

является тензором кручения-кривизны проективной связности Γ пространства $P_{n,\tau}$.

2. Пусть базисное распределение $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ оснащено в смысле Картана внутренним образом, т.е. в каждом центре A_0 элемента распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ внутренним инвариантным образом присоединена оснащающая плоскость $\tilde{\mathcal{K}}_{n-\tau-1}(\nu^p_n)$ [3], принадлежащая нормали I-го рода $N_{n-\tau}(A_0)$ базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$ и не проходящая через точку A_0. Известно [3], что инвариантная оснащающая плоскость $\tilde{\mathcal{K}}_{n-\tau-1}(\nu^p_n)$ натянута на точки

$$\mathcal{K}_\alpha = A_\alpha - H^0_\alpha A_0, \; \mathcal{K}_i = A_i - L^0_i A_0, \; \mathcal{K}_n(\nu^p_n) = \mu^0_n A_0 + \underline{\nu^u_n} A_u + \nu^p_n A_p + A_n, \tag{2.7}$$

где

$$\mu^0_n = \nu^0_n - \underline{\nu^\alpha_n} H^0_\alpha - \underline{\nu^i_n} L^0_i, \quad \nu^0_n = -\frac{1}{\tau}(\nu^p_{np} - \Lambda^n_{pq}\nu^p_n\nu^q_n),$$

а фиксированные квазитензоры $\{\underline{\nu^\alpha_n}\}, \{\underline{\nu^i_n}\}$ – любые из построенных в работе [3, (2.17), (2.18)].

Найдем проективную связность Γ, внутренне определенную самим распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, т.е. построим охват объекта проективной связности Γ компонентами фундаментального объекта к-го порядка распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Предварительно представим систему дифференциальных уравнений (2.4) в следующем виде:

$$\nabla\Gamma^p_{0q} = \tilde\Gamma^p_{0qL}\omega^L_0, \quad \nabla\Gamma^p_{0\sigma} = \tilde\Gamma^p_{0\sigma L}\omega^L_0, \quad \nabla\Gamma^p_{0\alpha} = \tilde\Gamma^p_{0\alpha L}\omega^L_0,$$

$$\nabla\Gamma^p_{0n} - \Gamma^p_{0\sigma}\omega^\sigma_n + \omega^p_n = \tilde\Gamma^p_{0nL}\omega^L_0,$$

$$\nabla\Gamma^0_{0p} + \Gamma^s_{0p}\omega^0_s = \tilde\Gamma^0_{0pL}\omega^L_0, \quad \nabla\Gamma^0_{0u} + \Gamma^p_{0u}\omega^0_p + \omega^0_u = \tilde\Gamma^0_{0uL}\omega^L_0,$$

$$\nabla\Gamma^0_{0n} - \Gamma^0_{0\sigma}\omega^\sigma_n + \Gamma^p_{0n}\omega^0_p + \omega^0_n = \tilde\Gamma^0_{0nL}\omega^L_0,$$

$$\nabla\Gamma^p_{q\sigma} + \Gamma^p_{q\sigma}\omega^0_0 - \Gamma^p_{0\sigma}\omega^0_q + \Lambda^n_{q\sigma}\omega^p_n = \tilde\Gamma^p_{q\sigma L}\omega^L_0, \tag{2.8}$$

$$\nabla\Gamma^p_{qn} + \Gamma^p_{qn}\omega^0_0 - \Gamma^p_{0n}\omega^0_q - \Gamma^p_{q\sigma}\omega^\sigma_n + \Lambda^n_{qn}\omega^p_n = \tilde\Gamma^p_{qnL}\omega^L_0,$$

$$\nabla\Gamma^0_{q\sigma} + \Gamma^0_{q\sigma}\omega^0_0 - \Gamma^0_{0\sigma}\omega^0_q + \Gamma^s_{q\sigma}\omega^0_s + \Lambda^{\hat u}_{q\sigma}\omega^0_{\hat u} = \tilde\Gamma^0_{q\sigma L}\omega^L_0,$$

$$\nabla\Gamma^0_{qn} + \Gamma^0_{qn}\omega^0_0 - \Gamma^0_{0n}\omega^0_q + \Gamma^s_{qn}\omega^0_s + \Lambda^{\hat u}_{qn}\omega^0_{\hat u} - \Gamma^i_{qu}\omega^u_n = \tilde\Gamma^0_{qnL}\omega^L_0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (2.8) удовлетворяются, если в качестве компонент объекта проективной связности $\Gamma = \{\Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa}\}$ взять функции

$$\begin{cases} \Gamma^p_{0\sigma} = 0, \quad \Gamma^p_{0n} = \nu^p_n, \quad \Gamma^0_{0p} = 0, \quad \Gamma^0_{0i} = -L^0_i, \quad \Gamma^0_{0\alpha} = -H^0_\alpha, \quad \Gamma^0_{0n} = \nu^0_n, \\ \Gamma^p_{q\varkappa} = \nu^p_n\Lambda^n_{qs}\delta^s_\varkappa + \nu^p_n\Lambda^n_{qn}\delta^n_\varkappa; \; \Gamma^0_{q\varkappa} = \nu^0_n\Lambda^n_{qn}\delta^n_\varkappa + \nu^0_n\Lambda^n_{qs}\delta^s_\varkappa - H^0_\alpha\Lambda^\alpha_{q\varkappa} - L^0_i\Lambda^i_{q\varkappa}. \end{cases} \tag{2.9}$$

З а м е ч а н и е. Порядок охвата объекта проективной связности Γ зависит от порядка квазитензоров $\{\nu^p_n\}, \{\nu^i_n\}, \{\nu^\alpha_n\}$, участвующих в охватах (2.9) функций $\Gamma^{\bar p}_{\bar q \varkappa}$.

Слоевые формы $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ пространства проективной связности $P_{n,\tau}$, внутренне определенного на распределении $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, имеют вид:

$$\begin{cases} \hat\omega^0_0 = \omega^0_0 - (\nu^0_n\delta^n_\varkappa - L^0_i\delta^i_\varkappa - H^0_\alpha\delta^\alpha_\varkappa)\omega^\varkappa_0, \\ \hat\omega^p_0 = \omega^p_0 - \nu^p_n\delta^n_\varkappa\omega^\varkappa_0, \quad \hat\omega^p_q = \omega^p_q - \Lambda^n_{q\hat s}\nu^p_n\omega^{\hat s}_0, \\ \hat\omega^0_q = \omega^0_q - \nu^0_n\Lambda^n_{qs}\omega^s_0 + H^0_\alpha\Lambda^\alpha_{q\varkappa}\omega^\varkappa_0 - L^0_i\Lambda^i_{q\varkappa}\omega^\varkappa_0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Можно показать, следуя работе [11], что построенная внутренним образом проективная связность Γ определена путем проектирования при помощи оснащающей по Картану плоскости $\tilde{\mathcal{K}}_{n-\tau-1}(\nu^p_n)(A_0) = [\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_n]$ (2.7).

3. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,\ell}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями – ℓ-мерные центропроективные пространст-

ва — плоскости Π_ℓ, т.е. соответствующие ℓ-мерные линей элементы распределения $\mathcal{H}_\ell \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ [4]. Определим проектив связность γ пространства $P_{n,\ell}$ при помощи системы форм $\{\hat\theta^{\tau}_{j}\}$

$$\hat\theta^{\tau}_{j} = \omega^{\tau}_{j} - \gamma^{\tau}_{jK}\,\omega^{K}_{0}, \tag{2.11}$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega^{J}_{0} = \omega^{L}_{0}\wedge\omega^{J}_{L} + \omega^{0}_{0}\wedge\omega^{J}_{0},\quad D\hat\theta^{\tau}_{j} = \hat\theta^{\bar u}_{j}\wedge\hat\theta^{\tau}_{\bar u} + \omega^{K}_{0}\wedge\Delta\gamma^{\tau}_{jK}, \tag{2.12}$$

где $M^{\hat u}_{0K} = \delta^{\hat u}_{K}$,

$$\Delta\gamma^{\tau}_{jK} = d\gamma^{\tau}_{jK} - \gamma^{\tau}_{\bar\ell K}\omega^{\bar\ell}_{j} + \gamma^{\bar\ell}_{jK}\omega^{\tau}_{\bar\ell} - \gamma^{\tau}_{jL}\omega^{L}_{K} + \gamma^{\tau}_{jK}\omega^{0}_{0} + M^{\hat u}_{jK}\omega^{\tau}_{\hat u} - \gamma^{\tau}_{\bar\ell L}\gamma^{\bar\ell}_{jK}\omega^{L}_{0}. \tag{2.13}$$

Для того чтобы формы θ^{τ}_{j} определяли проективную связность γ в слоях (плоскостях Π_ℓ распределения $\mathcal{H}_\ell$) пространства проективной связности $P_{n,\ell}$, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности γ^{τ}_{jK} [8] – [11], т.е. чтобы выполнялись дифференциальные уравнения

$$\Delta\gamma^{\tau}_{jK} = \gamma^{\tau}_{jKL}\,\omega^{L}_{0}. \tag{2.14}$$

Тогда структурные уравнения для слоевых форм θ^{τ}_{j} пространств $P_{n,\ell}$ имеют вид

$$D\hat\theta^{\tau}_{j} = \hat\theta^{\bar u}_{j}\wedge\hat\theta^{\tau}_{\bar u} + \frac{1}{2}\tau^{\tau}_{jKL}\,\omega^{K}_{0}\wedge\omega^{L}_{0}, \tag{2.15}$$

где

$$\tau^{\tau}_{jKL} = 2\gamma^{\tau}_{j[KL]} \tag{2.16}$$

— тензор кручения-кривизны проективной связности пространств $P_{n,\ell}$. Охват компонент объекта проективной связности $\gamma=\{\gamma^{\tau}_{jK}\}$ можно осуществить с помощью функций

$$\begin{cases} \gamma^{i}_{0K} = \nu^{i}_{n}\delta^{n}_{K}, \quad \gamma^{0}_{0K} = \varphi^{0}_{n}\delta^{n}_{K} - N^{0}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{K} - L^{0}_{p}\delta^{p}_{K}, \\ \gamma^{0}_{jK} = \varphi^{0}_{n}M^{n}_{j\ell}\delta^{\ell}_{K} - N^{0}_{\alpha}M^{\alpha}_{jK} - L^{0}_{p}M^{p}_{jK}; \quad \gamma^{i}_{jK} = M^{n}_{j\ell}\nu^{i}_{n}\delta^{\ell}_{K}, \end{cases} \tag{2.17}$$

которые удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям (2.14).

Таким образом, слоевые формы $\hat\theta^{\tau}_{j}$ пространства проективной связности $P_{n,\ell}$, внутренне определенного распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, имеют вид

$$\begin{cases} \hat\theta^{0}_{0} = \omega^{0}_{0} - (\varphi^{0}_{n}\delta^{n}_{K} - N^{0}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{K} - L^{0}_{p}\delta^{p}_{K})\,\omega^{K}_{0}, \\ \hat\theta^{i}_{0} = \omega^{i}_{0} - \nu^{i}_{n}\delta^{n}_{K}\,\omega^{K}_{0}, \quad \theta^{i}_{j} = \omega^{i}_{j} - M^{n}_{j\ell}\delta^{\ell}_{K}\nu^{i}_{n}\,\omega^{K}_{0}, \\ \hat\theta^{0}_{j} = \omega^{0}_{j} - (\varphi^{0}_{n}M^{n}_{j\ell}\delta^{\ell}_{K} - N^{0}_{\alpha}M^{\alpha}_{jK} - L^{0}_{p}M^{p}_{jK})\,\omega^{K}_{0}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Нами доказано, что проективная связность γ, определенная формами (2.18), получена проектированием при помощи оснащающей по Э.Картану плоскости $\mathcal{K}_{n-\ell-1}(\nu^{i}_{n})(A_0)$ [3, §3]:

$$x^{i} = \nu^{i}_{n}x^{n}, \quad x^{0} - \varphi^{0}_{n}x^{n} + L^{0}_{p}x^{p} + N^{0}_{\alpha}x^{\alpha} = 0, \tag{2.19}$$

где

$$\varphi^{0}_{n} = -\frac{1}{\ell}\left(\nu^{i}_{ni} - M^{n}_{Ki}\nu^{K}_{n}\nu^{i}_{n}\right), \quad N^{0}_{\alpha} = \frac{1}{\ell}H^{i}_{\alpha i}.$$

Плоскость Э.Картана $\mathcal{K}_{n-\ell-1}(\nu^{i}_{n})(A_0) \subset N_{n-\ell}(\nu^{i}_{n})(A_0)$ определена точками

$$\hat K_{\alpha} = A_{\alpha} - \nu^{0}_{\alpha}A_0, \quad \hat K_{p} = A_{p} - L^{0}_{p}A_0, \quad \hat K_{n}(\nu^{i}_{n}) = (\varphi^{0}_{n} - \underline{\nu}^{\alpha}_{n}N^{0}_{\alpha} - \underline{\nu}^{p}_{n}L^{0}_{p}) + \nu^{\hat u}_{n}A_{\hat u} + A_{n}, \tag{2.20}$$

где $\hat K_{n}(\nu^{i}_{n})$ — аналог обобщенной точки Кенигса [12] соответствующей нормали $N_{n-\ell}(\nu^{i}_{n})$, а фиксированные квазитензоры $\{\underline{\nu}^{\alpha}_{n}\}$, $\{\underline{\nu}^{p}_{n}\}$ — любые из найденных в работах [3, §2], [4, §§2-5].

4. Рассмотрим теперь пространство проективной связности $P_{n,n-m-1}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями — $(n-m-1)$-мерные центропроективные пространства (плоскости $\mathcal{X}_{n-m-1}$) – характеристики соответствующих $(n-1)$-мерных линейных элементов оснащающего распределения $\mathcal{H}_{n-1} \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$.

Проективную связность ϑ пространства $P_{n,n-m-1}$ можно определить при помощи форм $\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}$:

$$\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = \omega^{\bar\alpha}_{\bar\beta} - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\,\omega^{K}_{0}, \tag{2.21}$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = \vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta}\wedge\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} + \omega^{K}_{0}\wedge\Delta\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}, \tag{2.22}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K} = {} & d\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K} - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta L}\omega^{L}_{K} - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma K}\omega^{\bar\gamma}_{\bar\beta} + \vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta K}\omega^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} + \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\omega^{0}_{0} + H^{\hat u}_{\bar\beta K}\omega^{\bar\alpha}_{\hat u} - \\ & - \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma L}\vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta K}\omega^{L}_{0}, \quad H^{\hat u}_{0K} = \delta^{\hat u}_{K}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Совокупность величин $\{\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K}\}$ назовем [11] объектом проективной связности пространства $P_{n,n-m-1}$. Для того чтобы формы $\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}$ определяли проективную связность ϑ пространства $P_{n,n-m-1}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дифференциальные уравнения

$$\Delta\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta K} = \vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta KL}\,\omega^{L}_{0}, \tag{2.24}$$

или, что то же,

$$D\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = \vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\beta}\wedge\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma} + \frac{1}{2}R^{\bar\alpha}_{\bar\beta KL}\,\omega^{K}_{0}\wedge\omega^{L}_{0},$$

10 Зак. 1399

где

$$R^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\varkappa L} = 2\vartheta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}[\varkappa L]} \qquad (2.25)$$

является тензором кручения-кривизны пространства $P_{n,n-m-1}$.

Легко убедиться, что уравнения (2.24) удовлетворяются, если в качестве компонент объекта проективной связности $\vartheta = \{\vartheta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\varkappa}\}$ взять следующие функции:

$$\begin{cases} \vartheta^{\alpha}_{0\varkappa} = \nu^{\alpha}_{n}\delta^{n}_{\varkappa}, \quad \vartheta^{0}_{0\varkappa} = \psi^{0}_{n}\delta^{n}_{\varkappa} - M^{0}_{i}\delta^{i}_{\varkappa} - M^{0}_{p}\delta^{p}_{\varkappa}, \\ \vartheta^{\alpha}_{\beta\varkappa} = \nu^{\alpha}_{n}H^{n}_{\beta\hat{\gamma}}\delta^{\gamma}_{\varkappa}, \quad \vartheta^{0}_{\alpha\varkappa} = \psi^{0}_{n}H^{n}_{\alpha\varkappa} - M^{0}_{a}H^{a}_{\alpha\varkappa}. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Слоевые формы $\vartheta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$ пространства проективной связности $P_{n,n-m-1}$ внутренне определенного на распределении $\mathcal{H}_{n-m-1} \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \vartheta^{0}_{0} = \omega^{0}_{0} - (\psi^{0}_{n}\delta^{n}_{\varkappa} - M^{0}_{a}\delta^{a}_{\varkappa})\omega^{\varkappa}_{0}, \\ \vartheta^{\alpha}_{0} = \omega^{\alpha}_{0} - \nu^{\alpha}_{n}\delta^{n}_{\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \quad \vartheta^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \nu^{\alpha}_{n}H^{n}_{\beta\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \\ \vartheta^{0}_{\alpha} = \omega^{0}_{\alpha} - (\psi^{0}_{n}H^{n}_{\alpha\varkappa} - M^{0}_{a}H^{a}_{\alpha\varkappa})\omega^{\varkappa}_{0}. \end{cases} \qquad (2.27)$$

Можно показать, что проективная связность ϑ определяется путем проектирования при помощи внутренне определенной оснащающей по Э.Картану плоскости $\Pi_{m}(A_0)=[\widetilde{\mathcal{K}}_p, \widetilde{\mathcal{K}}_i, \widetilde{\mathcal{K}}_n]$ [13], заданной точками

$$\widetilde{\mathcal{K}}_p = A_p - M^{0}_{p}A_0, \quad \widetilde{\mathcal{K}}_i = A_i - M^{0}_{i}A_0,$$
$$\widetilde{\mathcal{K}}_n(\nu^{\alpha}_{n}) = (\psi^{0}_{n} - \underline{\nu}^{i}_{n}M^{0}_{i} - \underline{\nu}^{p}_{n}M^{0}_{p})A_0 + \nu^{\alpha}_{n}A_{\alpha} + \underline{\nu}^{a}_{n}A_a + A_n, \qquad (2.28)$$

где

$$\psi^{0}_{n} = -\frac{1}{n-m-1}(\nu^{\alpha}_{n\alpha} - H^{n}_{\gamma\alpha}\nu^{\gamma}_{n}\nu^{\alpha}_{n}),$$

а $\{\underline{\nu}^{p}_{n}\}$, $\{\underline{\nu}^{i}_{n}\}$ – любые фиксированные квазитензоры из [3, (2.16), (2.17)].

З а м е ч а н и е. Формулы (2.26) определяют охват объекта проективной связности фундаментальным объектом распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ не ниже 2-го порядка. Этот порядок зависит от порядка квазитензоров $\{\nu^{p}_{n}\}, \{\nu^{i}_{n}\}, \{\nu^{\alpha}_{n}\}$, участвующих в охватах (2.26), т.к. остальные функции имеют порядок не выше второго. Аналогичные утверждения имеют место и при построении охвата (2.17) объекта проективной связности $\gamma = \{\gamma^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}\varkappa}\}$ пространства $P_{n,\ell}$. Построение квазитензоров $\{\nu^{p}_{n}\}, \{\nu^{i}_{n}\}, \{\nu^{\alpha}_{n}\}$ различных порядков приведено в работах [3, §2], [4, §§2-5].

5. Следуя работам [5] - [6], докажем способ построения двойственных проективных связностей относительно инволютивного преобразования $\mathcal{J}$ (1.7). Рассмотрим, например, охват объекта проективной связности $\{\Pi^{\bar{p}}_{\bar{q}\varkappa} \overset{def}{=} \bar{\Gamma}^{\bar{p}}_{\bar{q}\varkappa}\}$ двойственного образа $\bar{\mathcal{H}}^{\tau}_{m,n-1} \subset \bar{P}_n$, аналогичный охвату объекта $\Gamma^{\bar{p}}_{\bar{q}\varkappa}$ (в этом случае для величин $\Gamma^{\bar{p}}_{\bar{q}\varkappa}$ входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху). После чего по закону $\mathcal{J}$ (1.7), учитывая при этом формулы (1.18), (1.19), находим охват объекта проективной связности $\{\Pi^{\bar{p}}_{\bar{q}\varkappa}\}$ – двойственного образа объекта $\{\Gamma^{\bar{p}}_{\bar{q}\varkappa}\}$.

Системы форм $\{\bar{\omega}^{\bar{p}}_{\bar{q}}\}, \{\bar{\theta}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}}\}, \{\bar{\vartheta}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\}$, построенные по закону соответственно вида (2.10), (2.18), (2.27) (в этом случае входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху), удовлетворяют (каждая) структурным уравнениям Картана-Лаптева и определяют соответственно пространства $\bar{P}_{n,\tau}$; $\bar{P}_{n,\ell}$; $\bar{P}_{n,n-m-1}$ с линейной связностью проективного типа, двойственные соответствующим пространствам $P_{n,\tau}$; $P_{n,\ell}$; $P_{n,n-m-1}$. Таким образом, имеет место [14]

Т е о р е м а 3. С регулярным скомпонованным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1} \subset P_n$ в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ его образующего элемента ассоциируются пространства проективной связности $\bar{P}_{n,\tau}$; $\bar{P}_{n,\ell}$; $\bar{P}_{n,n-m-1}$, двойственные соответственно пространствам проективной связности $P_{n,\tau}$; $P_{n,\ell}$; $P_{n,n-m-1}$ относительно инволютивного преобразования $\mathcal{J}$ (1.7). Порядок t дифференциальной окрестности определяется порядком охвата квазитензоров $\{\nu^{p}_{n}\}, \{\nu^{i}_{n}\}, \{\nu^{\alpha}_{n}\}$, участвующих в охватах.

Библиографический список

1. П о п о в Ю.И. Трехсоставные распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.65-86.

2. Н о р д е н А.П. Теория композиций // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.117-145.

3. П о п о в Ю.И. Скомпонованные трехсоставные распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.73-96.

4. П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. 126 с. Деп. в ВИНИТИ. 16.12.82. № 6192 - 82 Деп.

5. Столяров А.В. Двойственная теория регулярно распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности. I; II // Известия вузов. Математика. 198 № 1. С.79-82. 1980. № 2. С.84-87.

6. Столяров А.В. Двойственная теория гиперполо ного распределения и ее приложения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. тематич. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Вып.13. С.95-102.

7. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

8. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. № 2. С.275-382.

9. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейки П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева / Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

10. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, 1961. Л.: Наука, 1964. Т.2. С.225-233.

11. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределени m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

12. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинар ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

13. Попов Ю.И. О специальных классах трехсоставных распределений проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Деп. в ВИНИТИ 13.12.89. № 7402 - В89 Деп.

14. Попов Ю.И. О двойственных проективных связностях регулярного трехсоставного распределения / Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. Деп. в ВИНИТИ 23.06.83. № 3430 - 83 Деп.

УДК 514.75

ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПРЯМЫЕ КОТОРЫХ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ФОКУСЫ ПРЯМЫХ КОНГРУЭНЦИИ ОБЩИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ

О.С.Редозубова

(Московский государственный педагогический университет)

В евклидовом трехмерном пространстве рассмотрены пары Т конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$ с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми $(\bar{T})$, соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров (T_0). Такие пары обозначим буквой $\bar{T}_0$. Найдены некоторые характеристические свойства таких пар.

К паре Т конгруэнций $\{\tau_a\}$, фокусы которых F_a и F_a', присоединен подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec{e}_i)$ $(i=1,2,3)$, где $O\in\tau$, $\vec{e}_3 \parallel \tau$. Направляющие векторы прямых τ_a есть векторы

$$\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a ,$$

где α_a -углы, образуемые вектором $\vec{e}_1$ с векторами $\vec{\eta}_a$. По отношению к реперу $(O,\vec{e}_3)$ точки $K_a=\tau\cap\tau_a$ имеют координаты k_a, так что расстояние между соответствующими прямыми равно $|k_1-k_2|$. Относительно реперов $(K_a,\vec{\eta}_a)$ фокусы прямых τ_a F_a и F_a' имеют координаты ρ_a и ρ_a'. Угол между фокальными плоскостями Π_a конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров равен 2φ, расстояние между фокусами равно 2ξ. Компоненты инфинитезимальных преобразований репера R удовлетворяют условиям:

$$d\vec{O} = \omega^i \vec{e}_i \ , \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \qquad (i,j=1,2,3).$$

Известно, что пары Т конгруэнций могут быть общими (при условии $\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' \neq 0$) и специальными (при условии $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2'$). Условия, определяющие пары Т конгруэнций, в общем случае определяются системой уравнений (3) в [1, с.3], в специальном случае - системой уравнений (8) в [1, с.5].

Рассмотрим пары Т конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми. Такие пары $\bar{T}$ конгруэнций существуют с произволом четырех функций одного аргумента в общем случае и определяются системой уравнений (28) в [1, с.18]: