ОТ РЕДАКТОРА

В данном сборнике публикуются работы, выполненные на кафедре геометрии Калининградского университета в 1969 году. Сотрудники и аспиранты кафедры, а также студенты геометры старших курсов работали в этом году над проблемой построения дифференциальной геометрии многообразий некоторых классов фигур и пар фигур в трехмерном аффинном и проективном пространствах. В первом цикле из шести работ, рассматриваются многообразия фигур в проективном пространстве. В статье В.С.Малаховского введено понятие расслоения для пар конгруэнций простейших алгебраических фигур и исследованы расслояемые пары конгруэнций, образованные конгруэнцией коник и прямолинейной конгруэнцией. Ю.И.Попов рассмотрел оснащенные вырожденные гиперполосы ранга z в n-мерном проективном пространстве. Б.А.Андреев и В.М.Овчинников начали изучение дифференцируемых отображений многообразий некоторых типов нелинейных фигур в точечные многомерные пространства. Г.Л.Свешникова и В.В.Махоркин исследовали конгруэнции коник у которых несколько фокальных поверхностей вырождаются в линии и плоскости.

Во втором цикле работ исследуются двупараметрические семейства некоторых типов пар фигур в трехмерном эквиаффинном (Г.П.Ткач) и аффинном (Ф.А.Липатова) пространствах.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

В.С.МАЛАХОВСКИЙ

КОНГРУЭНЦИИ КОНИК, ПОРОЖДЕННЫЕ РАССЛОЯЕМОЙ ПАРОЙ C_ℓ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 определены индуцированно расслояемые пары конгруэнций некоторых типов фигур. Исследованы конгруэнции коник, образующие вместе с инвариантно присоединенными к ним прямолинейными конгруэнциями расслояемую пару.

§ I. Индуцированно расслояемые пары конгруэнций фигур в P_3.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару конгруэнций (двупараметрических семейств), образованную конгруэнцией (F_1) фигур F_1 и конгруэнцией (F_2) фигур F_2. Если F_1 и F_2 -прямые линии, то для пары конгруэнций (F_1) и (F_2) определено понятие одностороннего и двустороннего расслоения ([I], стр. 66-70). Опираясь на это понятие можно определить различные типы расслоений для пар конгруэнций некоторых классов фигур.

О п р е д е л е н и е I.I Пара фигур $F=\{F_1,F_2\}$ пространства P_3 называется k-линейно индуцирующей, если она индуцирует k и только k попарно непересекающихся прямых линий $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_k$. Если $k=0$, то пара F называется линейно неиндуцирующей.

Если $F=\{F_1,F_2\}$ -2-линейно индуцирующая пара, то пара конгруэнций (F_1), (F_2) индуцирует в общем случае пару прямолинейных конгруэнций (ℓ_1), (ℓ_2). Однако, если $F=\{F_1,F_2\}$ - линейно неиндуцирующая или I-линейно индуцирующая пара фигур, то пара конгруэнций (F_1) и (F_2) все же может индуцировать пару прямолинейных конгруэнций.

Рассмотрим различные типы неиндуцирующих и I,2-линейно индуцирующих пар фигур в P_3, конгруэнции которых индуцируют пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ').

I). F_1 -плоскость, F_2 - не инцидентная ей точка. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является линейно неиндуцирующей. Пара конгруэнций (F_1) и (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ'), где ℓ -прямая, проходящая через точку F_2 и характеристическую точку плоскости F_1, а ℓ' -линия пересечения плоскости F_1 с касательной плоскостью к поверхности (F_2).

2). F_1 и F_2 -точки (плоскости). Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является I-линейно индуцирующей парой, так как индуцирует одну и только одну прямую ℓ, инцидентную точкам (плоскостям) F_1, F_2. Пара конгруэнций (F_1) и (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ'), где ℓ' -линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (F_1) и (F_2) в точках F_1, F_2 (прямая, соединяющая характеристические точки плоскостей F_1 и F_2).

3). F_1 -точка (плоскость), F_2 - не инцидентная ей прямая. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является I-линейно индуцирующей. Пусть α - плоскость (точка), инцидентная F_1 и F_2, β -касательная плоскость к поверхности F_1 (характеристическая точка плоскости F_1), m -прямая, инцидентная α и β, ℓ -прямая, инцидентная F_1 и β и сопряженная прямой m. Пара конгруэнций (F_1) и (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (F_2).

4). F_1 -коника, F_2 -точка, не инцидентная плоскости коники. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ -линейно неиндуцирующая. Пара конгруэнций (F_1), (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ), (ℓ'), где ℓ -прямая, проходящая через точку F_2 и характеристическую точку M плоскости коники, а ℓ' -поляра характеристической точки M относительно коники.

5). F_1 -коника, F_2 -прямая, неинцидентная плоскости коники. Пусть M -точка пересечения прямой F_2 с плоскостью коники. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ -2 -линейно индуцирующая. Она индуцирует прямую F_2 и поляру ℓ' точки M относительно коники.

6). F_1 и F_2 -коники, не инцидентные одной плоскости. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является 2-линейно индуцирующей. Она индуцирует прямую ℓ, инцидентную плоскостям коник, и прямую ℓ', инцидентную полюсам прямой ℓ относительно коник.

7). F_1 -квадрика, F_2 -не инцидентная ей точка. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является линейно неиндуцирующей. Пусть α -поляра точки F_2 относительно квадрики F_1, M -характеристическая точка поляры α. Пара конгруэнций (F_1), (F_2) индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ), (ℓ'), где ℓ - прямая, проходящая через точки F_2 и M, а ℓ' -полярно сопряженная ей (относительно квадрики F_1) прямая.

8). F_1 -квадрика, F_2 -не инцидентная ей прямая. Пара $F=\{F_1,F_2\}$ является 2-линейно индуцирующей. Она индуцирует, кроме прямой F_2, прямую ℓ, полярно сопряженную прямой F_2 относительно квадрики F_1.

Определение I.2. Пара конгруэнций (F_1), (F_2) называется индуцированно расслояемой, если она индуцирует двусторонне расслояемую пару прямолинейных конгруэнций.

Для всех отмеченных выше типов пар конгруэнций фигур можно ввести понятие индуцированного расслоения.

Определение I.3. Пусть F_1 -произвольная одномерная фигура (линия), а F_2 -прямая. Пара конгруэнций (F_1), (F_2) называется односторонне расслояемой (от конгруэнции (F_1) к конгруэнции (F_2)), если к конгруэнции (F_1) можно присоединить однопараметрическое семейство Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с линией F_1 конгруэнции (F_1)

содержали соответствующую прямую F_2 конгруэнции (F_2).

Аналогично можно ввести понятие расслоения для пар конгруэнций некоторых других типов фигур пространства P_3 .

§ 2. Расслояемые пары C_ℓ .

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\bar{A}_4\}$ Деривационные формулы репера R имеют вид :

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \tag{2.1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta. \tag{2.2}$$

Рассмотрим в P_3 пару C_ℓ конгруэнций, образованную конгруэнцией (C) коник C типа (§ 2.2.3)^2 [2] и конгруэнцией (ℓ) прямых ℓ , не инцидентных плоскостям коник и не имеющих с кониками общих точек. Пусть M –точка пересечения прямой ℓ с плоскостью коники C , ℓ' –поляра точки M относительно коники. Помещая вершины A_i $(i,j,k=1,2)$ репера R в точки пересечения прямой ℓ' с коникой, вершину A_3 –в точку M , вершину A_4 –на прямой ℓ , приведем (при надлежащей нормировке вершин A_α) уравнения коники C к виду :

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$\omega_i^4=\omega_i. \tag{2.4}$$

Система дифференциальных уравнений пары C_ℓ запишется в виде :

$$\left.\begin{array}{l}\omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Пара C_ℓ индуцирует пару прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ').

Т е о р е м а I.I. Индуцированно расслояемые пары C_ℓ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.5) условия двустороннего расслоения (I ,стр.69) прямолинейных конгруэнций (ℓ), (ℓ') принимают вид :

$$\Gamma_4^{ii}=\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij}-\Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii}, \quad \Gamma_4^{ij}=\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{jj}-\Gamma_3^{ji}\Gamma_j^{3j}, \quad \Gamma_3^{21}=\Gamma_3^{12} \tag{2.6}$$

Система (2.5),(2.6) имеет решение с произволом пяти функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 2.I. Пара C_ℓ называется расслояемой или парой C_ℓ' , если существуют одностороннее расслоение от конгруэнции (C) к конгруэнции (ℓ) и одностороннее расслоение от конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (ℓ').

Произвольную точку N коники (2.3) можно определить с помощью параметра σ посредством уравнения

$$\bar{N}=\bar{A}_1+\frac{1}{2}\sigma^2\bar{A}_2+\sigma\bar{A}_3. \tag{2.7}$$

Так как касательная плоскость к поверхности $(N)\in\Sigma$ (определение I.3) инцидентна прямой $\ell\equiv A_3A_4$, то

$$(d\bar{N}\,\bar{N}\,\bar{A}_3\bar{A}_4)=0. \tag{2.8}$$

Учитывая (2.7), получаем :

$$\sigma d\sigma=\frac{1}{4}\sigma^4\omega_2^1+\frac{1}{2}\sigma^3\omega_3^1+\frac{1}{2}\sigma^2(\omega_1^1-\omega_2^2)-\sigma\omega_3^2-\omega_1^2 \tag{2.9}$$

Дифференцируя это уравнения внешним образом с использованием (2.9), получим для σ уравнение шестой степени :

$$m_J \sigma^J = 0 \quad (J = 0, 1, \dots, 6). \tag{2.10}$$

Так как уравнение (2.10) должно удовлетворяться тождественно (относительно σ), то $m_J = 0$. Учитывая (2.5), получим семь конечных уравнений.

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_4^{ii} = \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij} - \Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{3j}, \quad \Gamma_3^{ii}\Gamma_j^{ij} - \Gamma_j^{ii}\Gamma_3^{ij} = 0, \\ &a^i\Gamma_3^{jj} - a^j\Gamma_3^{ji} + \Gamma_3^{ii}\Gamma_i^{jj} - \Gamma_3^{ij}\Gamma_i^{ji} + 2(\Gamma_4^{ji}\Gamma_3^{4j} - \Gamma_4^{jj}\Gamma_3^{4i}) = 0, \\ &2m + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

$$m = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}. \tag{2.12}$$

Условия одностороннего расслоения пары прямолинейных конгруэнций (ℓ),(ℓ') (от конгруэнции (ℓ) к конгруэнции (ℓ')) запишутся в виде :

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_3^{21} = \Gamma_3^{12}, \ \Gamma_4^{21} = \Gamma_4^{12} + \Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32} - \Gamma_3^{12}\Gamma_1^{31} + \Gamma_3^{21}\Gamma_2^{32} - \Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}, \\ &\Gamma_4^{11}\Gamma_1^{32} - \Gamma_4^{12}\Gamma_1^{31} + \Gamma_4^{21}\Gamma_2^{32} - \Gamma_4^{22}\Gamma_2^{31} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Уравнения (2.5),(2.II),(2.I3) определяют пары C'_ℓ.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пара C'_ℓ называется характеристической, если точка A_3 является характеристической точкой плоскости коники; пара C'_ℓ называется фокальной, если точки A_i являются фокусами коники и фокальные поверхности (A_i) конгруэнции (C) не вырождаются в линии.

Для характеристических пар C'_ℓ имеют место уравнения :

$$\Gamma_3^{41} = 0, \ \Gamma_3^{42} = 0. \tag{2.14}$$

Фокальные пары C'_ℓ характеризуются соотношениями :

$$\Gamma_1^{22} = 0, \ \Gamma_2^{11} = 0, \tag{2.15}$$

причем

$$\Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} \neq 0. \tag{2.16}$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Парой $\mathcal{D}$ называется характеристическая фокальная пара C'_ℓ у которой прямая ℓ инцидентна касательным плоскостям к поверхностям (A_i).

Из определения пары $\mathcal{D}$ следует, что

$$\omega_1^2 = 0, \ \omega_2^1 = 0, \ \omega_3^4 = 0 \tag{2.17}$$

Так как прямые $\ell = A_3A_4$ пары $\mathcal{D}$ образуют двупараметрическое семейство, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \Gamma_3^{11} & \Gamma_3^{21} & \Gamma_4^{11} & \Gamma_4^{21} \\ \Gamma_3^{12} & \Gamma_3^{22} & \Gamma_4^{12} & \Gamma_4^{22} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

равен двум. Учитывая (2.II),(2.I3),(2.I7), убеждаемся, что для пар $\mathcal{D}$ это условие равносильно неравенству

$$m \neq 0. \tag{2.19}$$

Уравнения второй строки системы (2.II) можно заменить, в силу (2.I7),(2.I9), уравнением Пфаффа

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 0. \tag{2.20}$$

Замыкая это уравнение, получим :

$$3(\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} - \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21}) + \Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{21} = 0. \tag{2.21}$$

Из уравнений (2.II),(2.I3),(2.2I) находим :

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_4^{21} = \Gamma_4^{12}, \ \Gamma_4^{12} = \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} - \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - m, \ \Gamma_2^{32} = \Gamma_1^{31}, \\ &\Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32} - \Gamma_3^{12}\Gamma_1^{31} + \Gamma_3^{21}\Gamma_2^{32} - \Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Т е о р е м а 1.2. Касательные к линиям $\omega_j=0$ на поверхностях (A_i) пары $\mathcal{D}$ пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим :

$$\bar{P}=\bar{A}_4+\Gamma_1^{31}\bar{A}_3 \tag{2.23}$$

Используя (2.22), находим :

$$(d\bar{A}_i)_{\omega_j=0}=\omega_i^i\bar{A}_i+\omega_i\bar{P}. \tag{2.24}$$

Следовательно, точка P инцидентна обеим касательным. Совместим вершину A_4 репера R с точкой P. Тогда

$$\Gamma_1^{31}=0,\ \Gamma_2^{32}=0. \tag{2.25}$$

Система конечных и пфаффовых уравнений пары $\mathcal{D}$ приводится к виду :

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_4^{ii}=\Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij},\ \Gamma_4^{21}=\Gamma_4^{12},\ \Gamma_3^{21}=\Gamma_3^{12},\\&\Gamma_4^{12}=\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}-m,\ \Gamma_3^{11}\Gamma_1^{32}-\Gamma_3^{22}\Gamma_2^{31}=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega_i^j=0,\ \omega_3^4=0,\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=0,\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3j}\omega_j,\\&\omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k.\end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Конгруэнция (C) коник с невырождающимися фокальными поверхностями (A_i) называется конгруэнцией $\mathcal{D}$, если пара C_ℓ, где ℓ —линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i), есть пара $\mathcal{D}$.

Ниже мы установим существование четырех непересекающихся классов конгруэнций $\mathcal{D}$.

О п р е д е л е н и е 2.5. Сеть линий $\omega_i=0$ на характеристической поверхности (A_3) называется f—сетью.

§ 3. Конгруэнции $\mathcal{D}$ с несопряженной f-сетью.

Рассмотрим конгруэнции $\mathcal{D}$ с несопряженной f-сетью на поверхности (A_3). Имеем :

$$\Gamma_3^{12}\neq 0. \tag{3.1}$$

Учитывая (2.16), можно так пронормировать вершины A_α репера R, чтобы

$$\Gamma_3^{12}=1,\ \Gamma_1^{32}=\Gamma_2^{31}. \tag{3.2}$$

Построенный канонический репер конгруэнции $\mathcal{D}$ назовем репером R'. Положим :

$$\Gamma_3^{11}=a,\ \Gamma_1^{32}=b,\ \ c=b-a, \tag{3.3}$$

$$\tfrac{1}{2}(\omega_1^1-\omega_2^2)=p\omega_1+q\omega_2,\ \ \omega_3^3=r\omega_1+s\omega_2. \tag{3.4}$$

Матрица компонент деривационных формул репера R' приводится к виду:

$$\begin{bmatrix}(p+r)\omega_1+(q+s)\omega_2 & 0 & b\omega_2 & \omega_1\\ 0 & (r-p)\omega_1+(s-q)\omega_2 & b\omega_1 & \omega_2\\ a\omega_1+\omega_2 & \omega_1+a\omega_2 & r\omega_1+s\omega_2 & 0\\ b\omega_1+(1+ac)\omega_2 & (1+ac)\omega_2+b\omega_2 & \Gamma_4^{3k}\omega_k & -3(r\omega_1+s\omega_2)\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$m=a^2-1\neq 0,\qquad b\neq 0. \tag{3.6}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega_i^3=b\omega_j\ ,\ \omega_3^i=a\omega_i+\omega_j\ ,\ \omega_4^i=b\omega_i+(1+ac)\omega_j, \tag{3.7}$$

находим :

$$\tfrac{1}{2}\,dc=c\left(\Omega+\tfrac{a}{m}\Theta_2\right),\ \tfrac{1}{2}\,da=a\Omega+2(s\omega_1+r\omega_2), \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2}\omega_4^{3'} - 2\omega_3^3 = \frac{ac}{m}\Theta_1 \qquad (3.8)$$

где положено

$$\Theta_i = q\omega_3^i - p\omega_3^j, \quad \Omega = p\omega_1 - q\omega_2 - 2\omega_3^3 \qquad (3.9)$$

Обозначим :

$$h = m - 2pq + 4(qr - ps), \ \alpha = ps + qr, \ \beta = pr + qs. \qquad (3.10)$$

Замыкания уравнений (3.4) имеют вид :

$$\left.\begin{aligned} &dp\wedge\omega_1 + dq\wedge\omega_2 + h\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \\ &dr\wedge\omega_1 + ds\wedge\omega_2 - \alpha\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

Предположим сначала, что

$$ac \neq 0. \qquad (3.12)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3.8), находим :

$$\left.\begin{aligned} &dq\wedge\omega_3^1 - dp\wedge\omega_3^2 - a\gamma\omega_1\wedge\omega_2 = 0, \\ &(2ds + a\,dp)\wedge\omega_1 + (2dr - a\,dq)\wedge\omega_2 + 2(8r^2 - 8s^2 - 3\beta - 2a\alpha)\omega_1\wedge\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

$$2a\alpha - (1 + a^2)\beta + \frac{1}{2}a^2\gamma = 0, \ \gamma = p^2 - q^2. \qquad (3.14)$$

Осуществляя последовательные продолжения полученной замкнутой системы, убеждаемся, что она совместна только при $\gamma = 0$, то есть при

$$q = \varepsilon p, \quad \varepsilon^2 = 1 \qquad (3.15)$$

Определение 3.I. Конгруэнции $\mathcal{D}$, характеризуемые соотношением (3.I5) и неравенствами (3.I), (3.I2), называются конгруэнциями $\mathcal{D}_\varepsilon$.

Теорема 3.I. Конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.

Доказательство. Обозначим :

$$\Omega_i^\varepsilon = \omega_1 + (-1)^i\varepsilon\omega_2, \quad \varepsilon^2 = 1 \qquad (3.16)$$

Подставляя (3.I5) в (3.II), (3.I3), (3.I4), получим :

$$s = -\varepsilon r, \qquad (3.17)$$

$$dp = -\frac{1}{2}\varepsilon h\Omega_1^\varepsilon, \qquad (3.18)$$

$$dr\wedge\Omega_1^\varepsilon = 0. \qquad (3.19)$$

Так как замыкание уравнения (3.I8) является следствием предыдущих уравнений, то полученная замкнутая система - в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ с произволом одной функции одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R' конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ имеет вид :

$$\begin{bmatrix} r\Omega_1^\varepsilon + p\Omega_2^\varepsilon & 0 & b\omega_2 & \omega_1 \\ 0 & r\Omega_1^\varepsilon - p\Omega_2^\varepsilon & b\omega_1 & \omega_2 \\ a\omega_1 + \omega_2 & \omega_1 + a\omega_2 & r\Omega_1^\varepsilon & 0 \\ b\omega_1 + (1+ac)\omega_2 & (1+ac)\omega_1 + b\omega_2 & k\Omega_1^\varepsilon & -3r\Omega_1^\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad (3.20)$$

где

$$k = 2\left[2r + \frac{acp}{m}(\varepsilon a - 1)\right].$$

Теорема 3.2. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4), порожденных конгруэнцией $\mathcal{D}_\varepsilon$, соответствуют. Фокусы луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2.

Доказательство. Пользуясь (3.20) и учитывая (3.12), находим уравнение торсов прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) в виде :

$$(\omega_1)^2-(\omega_2)^2=0. \tag{3.22}$$

Из совпадения уравнений торсов вытекает утверждение первой части теоремы. Фокусы $\bar{M}_i$ луча A_1A_2 определяются формулами

$$\bar{M}_i=\bar{A}_j+(-1)^j\bar{A}_i. \tag{3.23}$$

Отсюда

$$(M_1M_2;A_1A_2)=-1. \tag{3.24}$$

Определение 3.2. Линии $\omega_j+(-1)^j\omega_i=0$, соответствующие торсам прямолинейной конгруэнции (A_1A_2), называются линиями $\mathcal{L}_i$; касательные к характеристической поверхности (A_3), проходящие через фокусы M_i луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2), называются прямыми ℓ_i .

Теорема 3.3. Фокусы $F_{i,\kappa}$ коники C конгруэнции $\mathcal{D}$, отличные от A_i, являются точками пересечения прямых ℓ_i с коникой C. Фокусам $F_{i,1}$, $F_{i,2}$ соответствует фокальная линия $\mathcal{L}_i$.

Доказательство. Уравнения для определения фокальных поверхностей и фокальных семейств конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$, отличных от (A_i) и $\omega_i=0$, имеют вид :

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0,\ (x^1)^2-(x^2)^2=0, \tag{3.25}$$

$$(\omega_1+\omega_2)^2(\omega_1-\omega_2)^2=0. \tag{3.26}$$

Пользуясь (3.25), находим :

$$\bar{F}_{i,\kappa}=\bar{A}_j+(-1)^j\bar{A}_i+(-1)^\kappa\sqrt{2(-1)^j}\bar{A}_3 \tag{3.27}$$

Сравнивая (3.27) с (3.23), убеждаемся, что

$$F_{i,\kappa}=C\cap\ell_i \tag{3.28}$$

Фокусам $F_{1,\kappa}$ соответствует фокальное семейство ℓ_1, фокусам $F_{2,\kappa}$ -фокальное семейство ℓ_2 .

Теорема 3.4. Касательные к линиям $\mathcal{L}_i$ на поверхностях (A_1), (A_2) попарно пересекаются в точках, гармонически делящих точки A_3, A_4 .

Доказательство. Обозначим :

$$\bar{P}_i=\bar{A}_4+(-1)^j\ell\bar{A}_3. \tag{3.29}$$

Имеем :

$$(d\bar{A}_1)_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_1^1\bar{A}_1+\bar{P}_2\omega_1,\ (d\bar{A}_2)_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_2^2\bar{A}_1+\bar{P}_2\omega_2, \tag{3.30}$$

$$(d\bar{A}_1)_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_1^1\bar{A}_1+\bar{P}_1\omega_2,\ (dA_2)_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_2^2\bar{A}_1+\bar{P}_1\omega_2, \tag{3.31}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Линия

$$\Omega_1^\varepsilon=0 \tag{3.32}$$

геометрически характеризуется тем, что касательная к ней на поверхности (A_4) пересекает прямую $[A_1A_2]$. Так как

$$\mathcal{D}\Omega_1^\varepsilon=0, \tag{3.33}$$

то форма Пфаффа Ω_1^ε является полным дифференциалом.

Теорема 3.5. Вдоль линии $\Omega_1^\varepsilon=0$ все инварианты конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ постоянны.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из уравнений (3.18), (3.19) и уравнений

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}da&=[ap-2\tau(a+\varepsilon)]\Omega_1^\varepsilon\\ \tfrac{1}{2}dc&=\tfrac{c}{m}[p(a\varepsilon-1)-2\tau m]\Omega_1^\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

Рассмотрим теперь случай

$$ac = 0. \tag{3.35}$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Конгруэнции $\mathcal{D}$ с несопряженной ℓ-сетью на поверхности (A_3), удовлетворяющие условию

$$a = 0 \tag{3.36}$$

называются конгруэнциями $\mathcal{D}_2$; удовлетворяющие условию

$$c = 0 \tag{3.37}$$

-конгруэнциями $\mathcal{D}_3$.

Так как фокальные поверхности (A_i) конгруэнции $\mathcal{D}$ невырождены, то классы конгруэнций $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$ не пересекаются.

Т е о р е м а 3.6. Конгруэнции $\mathcal{D}_2$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии (3.36) уравнения (3.8),(3.II) приводятся к виду:

$$d \ln \ell = 2\Omega, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_4^3 = 0, \tag{3.38}$$

$$\left.\begin{array}{l} dp \wedge \omega_1 + dq \wedge \omega_2 - (1+2pq)\,\omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \\ dp \wedge \omega_1 - dq \wedge \omega_2 = 0. \end{array}\right\} \tag{3.39}$$

Полученная система -замкнутая. Она имеет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R' конгруэнции $\mathcal{D}_2$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} p\omega_1 + q\omega_2 & 0 & \ell\omega_2 & \omega_1 \\ 0 & -p\omega_1 - q\omega_2 & \ell\omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 & 0 \\ \ell\omega_1 + \omega_2 & \omega_1 + \ell\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

Для конгруэнций $\mathcal{D}_2$ справедливы теоремы 3.2, 3.3, 3.4.

Т е о р е м а 3.6. Каждая из поверхностей (A_1), (A_2), (A_3), $(A_3 - 2A_4)$ является инвариантной квадрикой

$$Q \equiv (x^4)^2 + 2x^3x^4 - 2x^1x^2 = 0. \tag{3.41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки A_1, A_2, A_3, $A_3 - 2A_4$ лежат на квадрике Q. Дифференцируя (3.4I) с помощью уравнений стационарности точки:

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + \Theta x^\alpha, \tag{3.42}$$

убеждаемся, что Q — инвариантная квадрика.

С л е д с т в и е. Прямые $[A_i A_3]$, $[A_i, A_3 - 2A_4]$ являются прямолинейными образующими квадрики Q. Прямые $[A_1 A_2]$ и $[A_3 A_4]$ полярно сопряжены относительно квадрики Q.

Т е о р е м а 3.7. Касательная плоскость к поверхности (M_i) конгруэнции $\mathcal{D}_2$ содержит точку P_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$d\bar{M}_i = (p\omega_1 + q\omega_2)\bar{M}_j + (\omega_1 + (-1)^j\omega_2)\bar{P}_i \tag{3.43}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

О п р е д е л е н и е 3.4. Конгруэнции $\mathcal{D}_2$, удовлетворяющие условию (3.I5), называются конгруэнциями $\mathcal{D}_2^\varepsilon$.

Т е о р е м а 3.8. Если конгруэнция $\mathcal{D}_2$ не является конгруэнцией $\mathcal{D}_2^\varepsilon$, то асимптотические линии на фокальных поверхностях (M_1) и (M_2) прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ образуют ℓ-сеть.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотические линии на (M_i) определяются уравнением:

$$[p+(-1)^j q]\,\omega_1\omega_2 = 0 \qquad (3.44)$$

Если $q \neq \varepsilon p$, то это уравнение определяет f-сеть.

Следствие. Если конгруэнция $\mathcal{D}_2$ не является конгруэнцией $\mathcal{D}_2^{\varepsilon}$, то прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) есть конгруэнция W [4].

Теорема 3.9. Торсы прямолинейных конгруэнций $(M_i P_i)$, порожденных конгруэнцией $\mathcal{D}_2$, соответствуют.

Доказательство. Пользуясь уравнениями (3.43) и уравнениями

$$\left.\begin{aligned} d\bar{P}_1 &= (b+\tfrac{1}{2})(\omega_1+\omega_2)\bar{M}_1+\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)\bar{M}_2+(p\omega_1-q\omega_2)(\bar{P}_1-\bar{P}_2),\\ d\bar{P}_2 &= -\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\bar{M}_1+(b-\tfrac{1}{2})(\omega_2-\omega_1)+(p\omega_1-q\omega_2)(\bar{P}_1-\bar{P}_2),\end{aligned}\right\} \qquad (3.45)$$

находим уравнение торсов прямолинейных конгруэнций (M_iP_i) в виде:

$$p^2(\omega_1)^2-q^2(\omega_2)^2=0, \qquad (3.46)$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 3.10. Конгруэнции $\mathcal{D}_2^{\varepsilon}$ существуют и определяются с произволом двух постоянных.

Доказательство. Подставляя (3.15) в (3.39), получим:

$$\left.\begin{aligned} dp &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon+2p^2)\Omega_1^{\varepsilon},\\ d\ln b &= 2p\Omega_1^{\varepsilon}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.47)$$

Система (3.47) - вполне интегрируема, следовательно, она имеет решение с произволом двух постоянных.

Замечание. Учитывая, что форма Ω_1^{ε} — полный дифференциал, положим:

$$\Omega_1^{\varepsilon} = du_{\varepsilon} \qquad (3.48)$$

Общее решение системы (3.47) приводится к виду:

$$p=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\,tg\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(u_{\varepsilon}+c_1), \quad b=\frac{c_2}{\cos^2\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\varepsilon}+c_1)} \qquad (3.49)$$

Теорема 3.11. Поверхности (M_i) конгруэнции $\mathcal{D}_2^2$ вырождаются в линии; касательные к линиям $\mathcal{L}_2$ на фокальных поверхностях $(F_{i,1})$ пересекаются.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы непосредственно следует из формул (3.15), (3.45). Полагая

$$a_{\varepsilon}=p+\varepsilon-\sqrt{2}, \quad b_{\varepsilon}=p+\varepsilon+\sqrt{2} \qquad (3.50)$$

и пользуясь формулами (3.27), находим:

$$(\bar{F}_{1,1}\bar{F}_{1,2}d\bar{F}_{1,1}d\bar{F}_{1,2})_{\omega_2=\omega_1}=(\omega_1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0\\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0\\ a_{\varepsilon} & -b_{\varepsilon} & 2b & 2\\ b_{\varepsilon} & -a_{\varepsilon} & 2b & 2\end{vmatrix}=0 \qquad (3.51)$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь конгруэнции $\mathcal{D}_3$. Подставляя (3.37) в (3.8), получим:

$$\tfrac{1}{2}da=a\Omega+2(s\omega_1+z\omega_2), \quad \omega_4^3=4\omega_3^3 \qquad (3.52)$$

Матрица (3.5) приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} (p+z)\omega_1+(q+s)\omega_2 & 0 & a\omega_2 & \omega_1\\ 0 & (z-p)\omega_1+(s-q)\omega_2 & a\omega_1 & \omega_2\\ a\omega_1+\omega_2 & \omega_1+a\omega_2 & z\omega_1+s\omega_2 & 0\\ a\omega_1+\omega_2 & \omega_1+a\omega_2 & 4(z\omega_1+s\omega_2) & -3(z\omega_1+s\omega_2)\end{bmatrix} \qquad (3.53)$$

Теорема 3.12. Конгруэнции $\mathcal{D}_3$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замыкая уравнения (3.52), получим:

$$(2ds+a\,dp)\wedge\omega_1+(2dr-a\,dq)\wedge\omega_2+2(8r^2-8s^2-3\beta-2a\alpha)\omega_1\wedge\omega_2=0. \quad (3.54)$$

Присоединяя к этому квадратичному уравнению уравнения (3.11), убеждаемся, что полученная замкнутая система – в инволюции и имеет решение с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3.13. Все коники конгруэнции $\mathcal{D}_3$ принадлежат конусу φ:

$$\varphi\equiv(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2+2x^3x^4=0 \quad (3.55)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коника (2.3) принадлежит квадрике (3.55), являющейся конусом с вершиной $\bar{A}_3-\bar{A}_4$. Дифференцируя (3.55) с помощью (3.42), убеждаемся, что f -инвариантный конус

§ 4. Конгруэнции $\mathcal{D}$ с сопряженной f-сетью.

О п р е д е л е н и е 4.1. Конгруэнции $\mathcal{D}$, с сопряженной f-сетью на характеристической поверхности (A_3) называются конгруэнциями $\mathcal{D}_0$.

Так как у конгруэнций $\mathcal{D}_0$ f-сеть на (A_3) сопряжена, то

$$\Gamma_3^{12}=0. \quad (4.1)$$

Пронормируем вершины A_α репера R так, чтобы

$$\Gamma_1^{32}=1, \quad \Gamma_2^{31}=1. \quad (4.2)$$

Возможность такой нормировки обусловлена невырожденностью поверхностей (A_i). Полагая

$$\frac{1}{2}(\omega_1^1-\omega_2^2)=p\omega_1+q\omega_2, \quad \omega_3^3=r\omega_1+s\omega_2, \quad \Gamma_3^{11}=a, \quad (4.3)$$

приводим матрицу компонент деривационных формул построенного канонического репера (репера R'') к виду :

$$\begin{bmatrix} (p+r)\omega_1+(q+s)\omega_2 & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & (r-p)\omega_1+(s-q)\omega_2 & \omega_1 & \omega_2 \\ a\omega_1 & a\omega_2 & r\omega_1+s\omega_2 & 0 \\ a(1-a)\omega_2 & a(1-a)\omega_1 & \Gamma_4^{3k}\omega_k & -3(r\omega_1+s\omega_2) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega_i^3=\omega_j, \quad \omega_3^i=a\omega_i, \quad \omega_4^i=a(1-a)\omega_j, \quad (4.5)$$

находим

$$r=\frac{1}{2}ap, \quad s=-\frac{1}{2}aq, \quad (4.6)$$

$$da=2a(1-a)(p\omega_1-q\omega_2), \quad \omega_4^3=2a(1-a)(q\omega_1-p\omega_2) \quad (4.7)$$

Осуществляя последовательные продолжения полученной системы уравнений, убеждаемся, что она имеет решение только при

$$(a-1)(p^2-q^2)=0. \quad (4.8)$$

О п р е д е л е н и е 4.2. Конгруэнции $\mathcal{D}_0$, характеризуемые условием

$$a=1,$$

называются конгруэнциями $\mathcal{D}_0^1$; конгруэнции $\mathcal{D}_0$, характеризуемые условием

$$q=\varepsilon p, \quad \varepsilon^2=1, \quad (4.10)$$

называются конгруэнциями $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$.

Т е о р е м а 4.1. Конгруэнции $\mathcal{D}_0'$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (4.9) в (4.7), получим

$$da=0, \quad \omega_4^3=0 \quad (4.11)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4.3) с учетом (4.6),(4.II), находим :

$$\left.\begin{aligned} dp\wedge\omega_1 - dq\wedge\omega_2 = 0, \\ dp\wedge\omega_1 + dq\wedge\omega_2 + (1+2pq)\omega_1\wedge\omega_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

Полученная замкнутая система имеет решение с произволом двух функций одного аргумента.

Матрица компонент деривационных формул репера R'' конгруэнции $\mathcal{D}_0'$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(3p\omega_1+q\omega_2) & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & -\frac{1}{2}(p\omega_1+3q\omega_2) & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \frac{1}{2}(p\omega_1-q\omega_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}(p\omega_1-q\omega_2) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Теорема 4.2. Все коники конгруэнции $\mathcal{D}_0'$ принадлежат одному конусу f :

$$f \equiv (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0. \quad (4.14)$$

Доказательство. Коника (2.3) принадлежит квадрике f, являющейся конусом с вершиной A_4. Дифференцируя (4.I4), убеждаемся, что f -инвариантный конус.

Теорема 4.2. Конгруэнции $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ существуют и определяются с произволом двух постоянных.

Доказательство. Замыкая уравнения (4.3), (4.7), получим, в силу (4.6),(4.I0), вполне интегрируемую систему :

$$da = 2ap(1-a)\Omega_1^\varepsilon, \qquad dp = [p^2(1-2a) - \tfrac{1}{2}a^2\varepsilon]\Omega_1^\varepsilon, \quad (4.15)$$

определяющую конгруэнцию $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ с произволом двух постоянных.

Матрица компонент деривационных формул репера R'' конгруэнции $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ записывается в виде :

$$\begin{bmatrix} p(\frac{1}{2}a\Omega_1^\varepsilon+\Omega_2^\varepsilon) & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & p(\frac{1}{2}a\Omega_1^\varepsilon-\Omega_2^\varepsilon) & \omega_1 & \omega_2 \\ a\omega_1 & a\omega_2 & \frac{1}{2}ap\Omega_1^\varepsilon & 0 \\ a(1-a)\omega_2 & a(1-a)\omega_1 & 2\varepsilon(1-a)p\Omega_1^\varepsilon & -\frac{3}{2}ap\Omega_1^\varepsilon \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Для конгруэнции $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$ справедливы теоремы (3.2),(3.3),(3.4) и (3.5).

Теорема 4.4. Фокусы Q_i луча ℓ прямолинейной конгруэнции (A_3A_4), порожденной конгруэнцией $\mathcal{D}_{0,\varepsilon}$, гармонически делят точки A_3A_4.

Доказательство. Пользуясь (4.I6), находим

$$\bar{Q}_i = (a-1)(-1)^i\bar{A}_3 + \bar{A}_4 \quad (4.17)$$

откуда следует

$$(Q_1Q_2; A_3A_4) = -1. \quad (4.18)$$

Теорема 4.5. Поверхность Q_1 конгруэнции $\mathcal{D}_{0,-1}$ и поверхность Q_2 конгруэнции $\mathcal{D}_{0,1}$ вырождаются в линии.

Доказательство. Пользуясь (4.I6) и (4.I7), находим

$$(d\bar{Q}_1)_{\omega_1+\omega_2=0} = 0, \quad (d\bar{Q}_2)_{\omega_1-\omega_2=0} = 0. \quad (4.19)$$

Литература.

1. С.П.Фиников, Теория конгруэнций ГИТТЛ, М, 1956
2. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сб., вып.3 (Труды Томского университета, т. I68) 28-42, I963
3. F. Backes, Sur la stratifications des congruences engendrées l'une par une droite, l'autre par une conique. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 47, №2, 66-82, 1961.

4. С.П.Фиников, Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М, 1950.

5. В.С.Малаховский, Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами. Геометрический сб., вып. 3 (Труды Томского университета, т. 160), 5-14, 1960

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Ю.И. П О П О В

ВВЕДЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ОСНАЩЕНИЯ НА ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ Γ_m МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

Гиперполоса в n-мерном проективном пространстве P_n является многообразием, образующим элементом которого является пара фигур $F=\{F_1, F_2\}$, где F_1 – точка, а F_2 – инцидентная ей гиперплоскость. В работе изучаются оснащенные вырожденные гиперполосы ранга z в проективном пространстве P_n. При исследовании используется аналитический аппарат и терминология, введенные в работах [2] – [7]. В целях полноты изложения в § I, (I) приведены основные обозначения и формулы работы [6], употребляемые в настоящей статье.

§ I. Развертывающиеся гиперполосы Γ_m.

I°. Аналитическое задание оснащенной вырожденной гиперполосы Γ_m ранга z $(z<m)$. В составном многообразии проективного пространства $C_{n(m)}$, базисная поверхность B_m оснащенной гиперполосы $N(\Gamma_m)$ задается тензорным полем*)

$$M_1^{\alpha}=M_1^{\alpha}(x^1, x^2,\dots,x^m), \tag{1.1}$$

а главные касательные гиперплоскости – тензорным полем

$$T_{\alpha}^{\circ}=T_{\alpha}^{\circ}(x^1, x^2,\dots,x^m). \tag{1.2}$$

Нормаль первого рода в данной точке $M_1^{\alpha}(x^i)$ базисной