УДК 514.75

М. А. Чешкова[1]
[1] _Алтайский государственный университет, Россия_
cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9016-3951
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-17

Примеры поверхностей постоянной средней кривизны

Поверхность в E^3 называется параллельной поверхности M, если она состоит из концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности M от точек этой поверхности. Касательные плоскости в соответствующих точках будут параллельными. Для поверхности в E^3 имеет место теорема Бонне: для любой поверхности M, имеющей постоянную положительную гауссову кривизну, существует параллельная ей поверхность с постоянной средней кривизной.

С использованием теоремы Бонне для поверхности вращения постоянной положительной гауссовой кривизны строятся поверхности постоянной средней кривизны. Поверхности постоянной средней кривизны описаны с помощью эллиптических интегралов.

Ключевые слова: параллельная поверхность, средняя кривизна, гауссова кривизна, теорема Бонне.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Обозначим через $k=(0,0,1)$ орт оси, а через $e(v)=(\cos(v), \sin(v),0)$ — радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде

Поступила в редакцию 10.02.2018 г.

$$r = ue(v\ ) + f(u)k, \tag{1}$$

где f — дифференцируемая функция, v, u — параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'e - k}{\sqrt{(f')^2 + 1}}.$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}},\ k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3}.$$

Гауссова кривизна $K = k_1 k_2$ равна

$$\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}} \frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3} = K.$$

Требуем $K = const$, получим два решения:

$$f(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1))}{c - Kt^2}} dt + c_1,$$

$$f(u) = -\int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1))}{c - Kt^2}} dt + c_1, \tag{2}$$

где c_1, c — произвольные константы.

В [1, с. 97] форма меридиана $f = f(u)$ исследована без вычисления эллиптического интеграла. Мы построим данные поверхности, используя математический пакет.

Имеем

$$f(u) = \pm \frac{-I\sqrt{c-1}EllipticE(\frac{u\sqrt{Kc}}{c}, \frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1})}{\sqrt{K}} + c_1. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда $K>0$. Для определенности полагаем $K=1$. Из (2, 3) имеем

$$f(u)=\pm\int_0^u\sqrt{\frac{t^2-c\ \ +1}{c\ \ -t^2}}dt+c_1,$$

$$f(u)=\pm(-I\sqrt{c-1}EllipticE(\frac{u}{\sqrt{c}},\frac{\sqrt{(c-1)c}}{c-1}))+c_1. \qquad (4)$$

Константам $c=1,\ c_1=0$ соответствуют решения

$$f(u)=\pm\sqrt{1-u^2}.$$

Меридиан в этом случае есть полуокружность, а поверхность есть сфера.

Из (5) следует $0<c<1$. Полагаем

$$c=\frac{1}{4},\ c_1=0,\ \ f'(u)=\sqrt{\frac{u^2-c\ \ +1}{c\ \ -u^2}}.$$

Имеем

$$f(u)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}EllipticE(2u,\frac{1}{3}\sqrt{3}I). \qquad (5)$$

Построим поверхность вращения (1) постоянной гауссовой кривизны (ПГК), где $f(u)$ определяется из (5), $u\in[0,\sqrt{c}]$, $v\in[-\pi,\pi]$ (рис. 1).

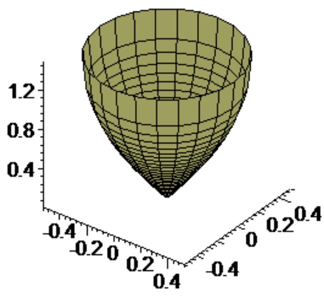

Рис. 1. Поверхность вращения ПГК, $c=1/4$

Для построения поверхности постоянной средней кривизны используем теорему Бонне [2, с. 110]: *для любой поверхности, имеющей постоянную положительную гауссову кривизну, существует параллельная ей поверхность с постоянной средней кривизной.*

Поверхность $\overline{M}$ называется параллельной поверхности M [1, с. 303], если она состоит из концов отрезков постоянной длины, отложенных на нормалях поверхности M от точек этой поверхности. Касательные плоскости в соответствующих точках будут параллельными.

Уравнение параллельной поверхности $\overline{M}$ имеет вид [1, с. 307]

$$\bar{r} = r + hn, h = \pm\sqrt{K} = \pm 1.$$

Имеем

$$n = \sqrt{u^2 - c + 1}e(v) - \sqrt{c - u^2}k .$$

Построим поверхности ПСК (рис. 2—4).

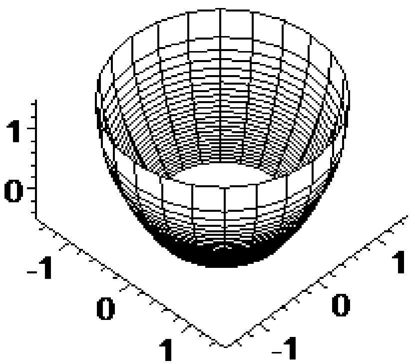

Рис. 2. Поверхность вращения ПСК, $c = 1/4$

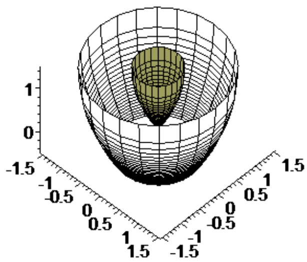

Рис. 3. Поверхности ПГК и ПСК, $c = 1/4,\ h = 1$

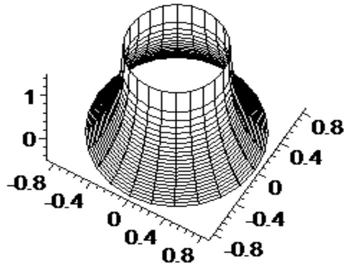

Рис. 4. Поверхность ПСК, $c = 1/4, h = -1$

Для случая $c > 1, u \in [\sqrt{c-1}, \sqrt{c}]$ сделаем замену переменной [2, с. 99] $u = \sqrt{c}\sin(t)$.

При $c = 4$, получим

$$n = \sqrt{1 - 4\cos(t)^2}\, e(v) - 2\cos(t)k,$$
$$r = 2\sin(t)e(v) - EllipticE(\cos(t), 2)k,$$

$t \in [\pi/3, \pi/2], v \in [-\pi, \pi]$.

Построим поверхность ПГК (рис. 5) и поверхности ПСК (рис. 6—8).

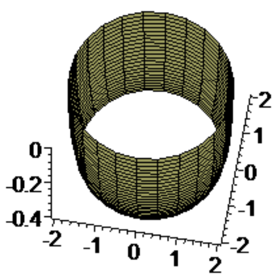

Рис. 5. Поверхность вращения ПГК, $c = 4, h = 1$

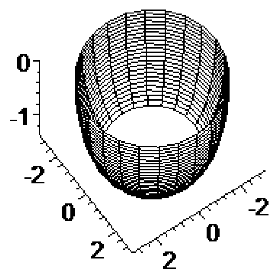

Рис. 6. Поверхность ПСК, $c = 4, h = 1$

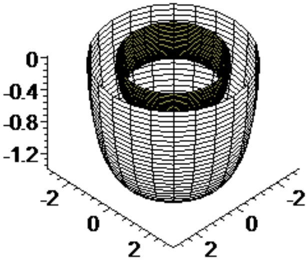

Рис. 7. Поверхности ПГК и ПСК, $c = 4, h = 1$

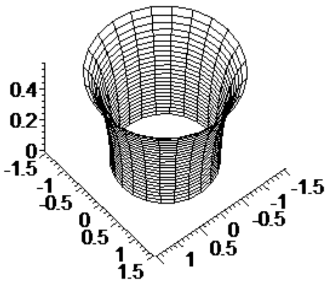

Рис. 8. Поверхность ПСК, $c = 4, h = -1$

Список литературы

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. М. ; Л., 1948.

2. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. М. ; Л., 1947.

M. A. Cheshkova[1]
[1] *Altai State University*
61 Pr. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9016-3951
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-17

Examples of surfaces of constant mean curvature

Submitted on February 10, 2018

A surface in E^3 is called parallel to the surface M if it consists of the ends of constant length segments, laid on the normals to the surfaces M at points of this surface. The tangent planes at the corresponding points will be parallel. For surfaces in E^3 the theorem of Bonnet holds: for any surface M that has constant positive Gaussian curvature, there exists a surface parallel to it with a constant mean curvature.

Using Bonnet's theorem for a surfaces of revolution of constant positive Gaussian curvature, surfaces of constant mean curvature are constructed. It is proved that they are also surfaces of revolution. A family of plane curvature lines (meridians) is described by means of elliptic integrals. The surfaces of constant Gaussian curvature are also described by means of elliptic integrals. Using the mathematical software package, the surfaces under consideration are constructed.

Keywords: parallel surface, mean curvature, Gaussian curvature, Bonnet theorem, elliptic integrals.

References

1. *Kagan V.F.* Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition. Part 2, Moskow, Leningrad (1948) (in Russian).
2. *Kagan V.F.* Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition. Part 1, Moskow, Leningrad (1947) (in Russian).