Утверждение 4. Если распределение $2m$-мерных касательных элементов L в $T(M)$ содержит m-мерное G-инвариантное подрасслоение L' расслоения V, то группа $GL(2m,R)$, представленная как группа преобразований векторного репера в слоях распределения L, содержит подгруппу G'.

4. Покажем теперь, что, если на $\mathcal{M}$ задано распределение m-мерных касательных элементов λ, то на $T(\mathcal{M})$ естественным образом определяется распределение $2m$-мерных касательных элементов, содержащее m-мерное G-инвариантное подрасслоение расслоения V. Для этого рассмотрим следующие величины:

$$\Lambda^{\mathcal{J}}_A = \{ \Lambda^i_a = \lambda^i_a,\ \Lambda^{n+i}_a = \lambda^i_{ak} y^k,\ \Lambda^i_{n+a} = 0,\ \Lambda^{n+i}_{n+a} = \lambda^i_a \}. \tag{17}$$

Используя (1),(2),(6), убеждаемся, что дифференциальные уравнения функций (17) имеют вид (16). При этом параметрические формы группы $GL(2m,R)$ определяются равенствами

$$\theta^B_A = \{ \theta^b_a = \theta^b_a,\ \theta^{n+b}_a = \theta^b_{ai} y^i,\ \theta^b_{n+a} = 0,\ \theta^{n+b}_{n+a} = \theta^b_a \}. \tag{18}$$

Теорема 1. Если на $\mathcal{M}$ задано распределение m-мерных касательных элементов λ, то на $T(\mathcal{M})$ естественным образом возникает распределение $2m$-мерных касательных элементов Λ, содержащее m-мерное G-инвариантное подрасслоение расслоения V.

Если вектор a принадлежит в точке $x \in M$ элементу распределения λ_x, то $a^i = u^a \lambda^i_a$ и ${}^c a = u^a \Lambda_a + u^a_j y^j \Lambda_{n+a}$.

Утверждение 5. Если в каждой точке $x \in M$ вектор a принадлежит элементу распределения λ_x, то полный лифт ${}^c a$ вектора a в $T(M)$ в точке $y\ (p(y)=x)$ принадлежит элементу распределения Λ.

Определение. Распределение касательных элементов Λ в $T(M)$, определенное структурным объектом $\Lambda^{\mathcal{J}}_A$ (см.(13)), назовем полным лифтом распределения касательных элементов λ в $T(M)$.

Теорема 2. Если распределение λ на $\mathcal{M}$ интегрируемо, то распределение Λ на $T(\mathcal{M})$, являющееся полным лифтом распределения λ, также интегрируемо.

Библиографический список

1. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии//Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М., 1966.Т.1.С.139-190.

2. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов//Тр. геометр. семинара/ ВИНИТИ.М., 1971.Т.3.С.29-48.

3. Yano K., Ishihara S. Tangent and cotangent bundles // Differential geometry. New-York, 1973. 434 p.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

НОРМАЛИ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.Попов
(Калининградский университет)

1. Инвариантную теорию регулярного гиперполосного распределения проективного пространства P_n построил А.В.Столяров [4]. В данной работе геометрия регулярного гиперполосного распределения, которое назовем $\mathcal{H}(M)$-распределением (или распределением $\mathcal{H}(M)$), рассматривается в аффинном пространстве A_n. Найдены аффинные нормали $\mathcal{H}(M)$-распределения, которые являются обобщениями аффинных нормалей Бляшке, нормалей $\vec{L}$ и $\vec{Q}$ гиперплоскостного распределения [1]. В окрестностях второго и третьего порядков получены проективные пучки нормалей 1-го рода для $\mathcal{H}(M)$-распределения аффинного пространства. Указаны различные конструкции построения нормалей регулярного $\mathcal{H}(M)$-распределения.

Работа выполнена методом Г.Ф.Лаптева [2]. На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\mathcal{J},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L} = \overline{1,n};\quad i,j,k,\ell = \overline{1,m};\quad \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma = \overline{m+1,n};\quad \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n-1};$$
$$a,b,c = \overline{1,n-1}.$$

2. К $\mathcal{H}(M)$-распределению присоединим подвижной репер $\{A,\vec{e}_{\mathcal{J}}\}$ аффинного пространства следующим образом: точку A совместим с центром данного распределения; векторы $\{\vec{e}_i\}$ поместим в плоскость $M(A)$ — m-мерную текущую плоскость базисного распределения (M-распределение); векторы $\{\vec{e}_\alpha\}$ поместим в плоскость $\chi_{n-m-1}(A)$-текущую плоскость распределения характеристик (χ-распределение). Согласно [4-5], относительно выбранного репера R_1 первого порядка, система дифференциальных уравнений $\mathcal{H}(M)$-распределения имеет вид:

$$\omega^n_i = \Lambda_{iK}\omega^K;\quad \omega^\alpha_i = M^\alpha_{iK}\omega^K;\quad \omega^n_\alpha = H_{\alpha\hat\beta}\omega^{\hat\beta};\quad \omega^i_\alpha = N^i_{\alpha K}\omega^K. \tag{1}$$

Продолжение уравнений (1) приводит к дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов первого

$\Gamma_1 = \{\Lambda_{ix}, M^{\alpha}_{ix}, H_{\alpha\beta}\}$ и второго $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, N^{i}_{\alpha x}\}$ порядков распределения $\mathcal{H}(M) \subset A_n$. Главный фундаментальный тензор $\{\Lambda_{ij}\}$ I-го порядка регулярного распределения $\mathcal{H}(M)$ невырожденный:

$$\Lambda_0 = \det \|\Lambda_{ij}\| \neq 0, \quad \nabla\Lambda_{ij} + \Lambda_{ij}\omega^n_n = \Lambda_{ijx}\omega^x. \qquad (2)$$

В общем случае определители

$$f_0 = \det \|H_{\alpha\beta}\|; \quad \mathcal{G}_0 = \det \|H_{bc}\|, \qquad (3)$$

где

$$\|H_{bc}\| = \left\| \begin{array}{c|c} \Lambda_{ij} & \Lambda_{i\beta} \\ \hline 0 & H_{\alpha\beta} \end{array} \right\|, \qquad (4)$$

отличны от нуля. Для невырожденных тензоров I-го порядка $\{\Lambda_{ij}\}$, $\{H_{\alpha\beta}\}$, $\{H_{bc}\}$ можно ввести в рассмотрение, вообще говоря, несимметрические обращенные им тензоры I-го порядка $\{\Lambda^{ij}\}$, $\{H^{\alpha\beta}\}$, $\{H^{bc}\}$. Определители (2),(3) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} d\ln\Lambda_0 &= 2\omega^k_k - m\,\omega^n_n + \Lambda_J\omega^J, \\ d\ln f_0 &= 2\omega^\gamma_\gamma - (n-m-1)\,\omega^n_n + f_J\omega^J, \\ d\ln \mathcal{G}_0 &= 2\omega^a_a - (n-1)\,\omega^n_n + \mathcal{G}_J\omega^J, \end{aligned} \qquad (5)$$

где

$$\Lambda_J = \Lambda^{jk}\Lambda_{kjJ}, \quad f_J = H^{\beta\gamma}H_{\gamma\beta J}; \quad \mathcal{G}_J = H^{ab}H_{baJ}, \qquad (6)$$

$$\nabla\Lambda_J = (m+2)\Lambda_{kJ}\omega^k_n + m\,H_{\beta J}\omega^\beta_n + \Lambda_{Jx}\omega^x, \qquad (7)$$

$$\nabla f_J = (n-m-1)\Lambda_{kJ}\omega^k_n + (n-m+1)H_{\gamma J}\omega^\gamma_n + f_{Jx}\omega^x, \qquad (8)$$

$$\nabla\mathcal{G}_J = (n+1)H_{aJ}\omega^a_n + \mathcal{G}_{Jx}\omega^x \qquad (9)$$

3. Аффинная нормаль $\mathcal{L}$. Введем в рассмотрение систему функций $\{\mathcal{L}^\alpha\}$ [1]:

$$\mathcal{L}^\alpha = -H^{\alpha\beta}H_{\beta n}, \quad \nabla\mathcal{L}^\alpha = \mathcal{L}^\alpha\omega^n_n - \omega^\alpha_n + \hat{\mathcal{L}}^\alpha_x\omega^x. \qquad (10)$$

Из уравнений (10) следует, что система функций $\{\mathcal{L}^\alpha\}$ образует квазитензор 1-го порядка. Далее, используя геометрический объект $\{\mathcal{L}^\alpha\}$, в окрестности I-го порядка находим еще один квазитензор $\{\mathcal{L}^i\}$:

$$\mathcal{L}^i = -\Lambda^{is}\Lambda_{sn} - \Lambda^{is}\Lambda_{s\alpha}\mathcal{L}^\alpha; \quad \nabla\mathcal{L}^i = \mathcal{L}^i\omega^n_n - \omega^i_n + \hat{\mathcal{L}}^i_x\omega^x. \qquad (11)$$

Таким образом, квазитензор I-го порядка $\{\mathcal{L}^a\} \stackrel{def}{=} \{\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^\alpha\}$, удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla\mathcal{L}^a = \mathcal{L}^a\omega^n_n - \omega^a_n + \mathcal{L}^{\hat{a}}_x\omega^x, \qquad (12)$$

задает инвариантное поле аффинной нормали $\mathcal{L} = [A, \vec{\ell}]$, внутренне определенное $\mathcal{H}(M)$-распределением, где

$$\vec{\ell} = \mathcal{L}^a\vec{e}_a + \vec{e}_n = \mathcal{L}^i\vec{e}_i + \mathcal{L}^\alpha\vec{e}_\alpha + \vec{e}_n. \qquad (13)$$

Выясним геометрический смысл построенной аффинной нормали I-го рода $\mathcal{L}$ оснащающего H-распределения. Введем предварительно величины $\{H_{an}\} \stackrel{def}{=} \{\Lambda_{in}, H_{\beta n}\}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla H_{an} = H_{ab}\omega^b_n + H_{anx}\omega^x. \qquad (14)$$

Из равенств (10),(11) находим, что

$$H_{an} + H_{ab}\mathcal{L}^b = 0. \qquad (15)$$

Заметим теперь, что при смещении начала репера A вдоль кривой

$$\omega^a = \mathcal{L}^a\omega^n, \qquad (16)$$

касающейся нормали $\mathcal{L} = [A, \vec{\ell}]$, мы получим

$$\omega^n_a = H_{an}\omega^n + H_{ab}\omega^b = (H_{an} + H_{ab}\mathcal{L}^b)\omega^n = 0. \qquad (17)$$

Таким образом, в силу (17) имеем

$$d\vec{e}_a = \omega^i_a\vec{e}_i + \omega^\alpha_a\vec{e}_\alpha + \omega^n_a\vec{e}_n = \omega^b_a\vec{e}_b, \qquad (18)$$

т.е. при смещении центра A распределения $\mathcal{H}(M)$ вдоль кривых, касающихся нормалей $\mathcal{L}$, гиперплоскостной элемент $\mathcal{H}(A)$ перемещается параллельно. Это предложение есть обобщение соответствующего результата Э.Д.Алшибая [1] на случай $\mathcal{H}(M)$-распределения. При этом поле аффинных нормалей $\mathcal{L}$, определяемое дифференциальными уравнениями (12), есть обобщение поля аффинных нормалей Γ, построенного Э.Д.Алшибая [1] для гиперплоскостного распределения аффинного пространства.

4. Нормаль Q. В окрестности 2-го порядка образующего элемента $\mathcal{H}(M)$-распределения построим тензоры

$$\begin{cases} Q^i_j = \hat{\mathcal{L}}^i_j - \mathcal{L}^i\mathcal{L}^k\Lambda_{kj} + N^i_{\alpha j}\mathcal{L}^\alpha, \quad Q^\alpha_\beta = \hat{\mathcal{L}}^\alpha_\beta - \mathcal{L}^\alpha\mathcal{L}^\gamma H_{\gamma\beta} + (M^\alpha_{i\beta} - \mathcal{L}^\alpha\Lambda_{i\beta})\mathcal{L}^i, \\ Q^\alpha_j = \hat{\mathcal{L}}^\alpha_j - \mathcal{L}^\alpha\mathcal{L}^k\Lambda_{kj} + M^\alpha_{kj}\mathcal{L}^k, \quad Q^i_\beta = \hat{\mathcal{L}}^i_\beta - \mathcal{L}^i\mathcal{L}^k\Lambda_{k\beta} - \mathcal{L}^i\mathcal{L}^\alpha H_{\alpha\beta}. \end{cases} \qquad (19)$$

Тогда совокупность величин $\{Q^a_b\} \stackrel{def}{=} \{Q^i_j, Q^\alpha_j, Q^i_\beta, Q^\alpha_\beta\}$ образует тензор 2-го порядка:

$$\nabla Q^a_b = Q^a_b \omega^n_n + Q^a_{bk}\omega^k. \qquad (20)$$

В общем случае тензор $\{Q^a_b\}$ невырожденный, что позволяет ввести обратный тензор $\{\widetilde{Q}^a_b\}$ 2-го порядка:

$$\widetilde{Q}^a_b Q^b_c = \delta^a_c, \quad \nabla \widetilde{Q}^a_b + \widetilde{Q}^a_b \omega^n_n = \widetilde{Q}^a_{bk}\omega^k. \qquad (21)$$

Рассмотрим функции $\{Q^a_n\} \overset{def}{=} \{Q^i_n, Q^\alpha_n\}$, где

$$Q^i_n = \hat{\mathcal{L}}^i_n - \mathcal{L}^i \mathcal{L}^\alpha H_{\alpha n} - \mathcal{L}^i \mathcal{L}^k \Lambda_{kn} + \mathcal{L}^\alpha N^i_{\alpha n}, \qquad (22)$$

$$Q^\alpha_n = \hat{\mathcal{L}}^\alpha_n - \mathcal{L}^\alpha \mathcal{L}^k \Lambda_{kn} - \mathcal{L}^\alpha \mathcal{L}^\beta H_{\beta n} + \mathcal{L}^i M^\alpha_{in}, \qquad (23)$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\nabla Q^a_n = Q^a_c \omega^c_n + Q^a_{nk}\omega^k. \qquad (24)$$

Теперь с помощью функций $\{\widetilde{Q}^a_b\}, \{Q^a_n\}$ составим функции $\{Q^\alpha\}$:

$$Q^a = -\widetilde{Q}^a_b Q^b_n, \quad \nabla Q^a - Q^a \omega^n_n + \omega^a_n = \hat{Q}^a_k \omega^k. \qquad (25)$$

Как следует из уравнений (25), квазитензор 2-го порядка $\{Q^a\} \overset{def}{=} \{Q^i, Q^\alpha\}$ определяет внутреннее инвариантное оснащение - нормаль I-го рода H-распределения. Отметим, что поле квазитензора $\{Q^i\}$ порождает поле нормалей I-го рода $Q_{n-m}(A)$ M-распределения, а поле квазитензора $\{Q^\alpha\}$ порождает поле нормалей I-го рода $Q_{m+1}(A)$ χ-распределения.

Имеет место теорема, обобщающая соответствующую теорему Э.Д.Алшибая [1][6]:

" Вдоль кривых, принадлежащих распределению нормалей Q , нормаль $\mathcal{L}$ переносится параллельно."

5.<u>Нормаль Бляшке.</u> В общем случае можно считать, что

$$\lambda_0 = \det \| a_{ij} \| \neq 0, \; h_0 = \det \| a_{\alpha\beta} \|, \; \mathcal{H}_0 = \det \| h_{ab} \| \neq 0, \qquad (26)$$

где

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}), \; a_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(H_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}), \; h_{ab} = \tfrac{1}{2}(H_{ab} + H_{ba}). \qquad (27)$$

Дифференцируя определители (26), получаем уравнения

$$\begin{aligned} d\ln \lambda_0 &= 2\,\omega^k_k - m\,\omega^n_n + \lambda_k \omega^k, \\ d\ln h_0 &= 2\,\omega^\gamma_\gamma - (n-m-1)\,\omega^n_n + h_k \omega^k, \\ d\ln \mathcal{H}_0 &= 2\,\omega^a_a - (n-1)\,\omega^n_n + \mathcal{H}_k \omega^k. \end{aligned} \qquad (28)$$

Уравнения (28) вводят функции 2-го порядка $\{\lambda_k\}, \{h_k\}, \{\mathcal{H}_k\}$. Для некоторых из них выпишем дифференциальные уравнения:

$$\nabla \lambda_k = (m+2)\Lambda_{ik}\omega^i_n + \lambda_{kj}\omega^j, \qquad (29)$$

$$\nabla \lambda_\alpha = (m+2)\Lambda_{i\alpha}\omega^i_n + m\,H_{\beta\alpha}\omega^\beta_n + \lambda_{\alpha k}\omega^k, \qquad (30)$$

$$\nabla h_i = (n-m-1)\Lambda_{ji}\omega^j_n + h_{ik}\omega^k, \qquad (31)$$

$$\nabla h_\alpha = (n-m+1)H_{\gamma\alpha}\omega^\gamma_n + (n-m-1)\Lambda_{i\alpha}\omega^i_n + h_{\alpha k}\omega^k, \qquad (32)$$

$$\nabla \mathcal{H}_a = (n+1)H_{ba}\omega^b_n + \mathcal{H}_{ak}\omega^k. \qquad (33)$$

Теперь, используя уравнения (29)-(33), убеждаемся, что каждая из совокупностей функций $\{\lambda^k\}, \{\lambda^\gamma\}, \{h^k\}, \{\mathcal{H}^a\}, \{h^\gamma\}$[5], где

$$\begin{aligned} &\lambda^k = -\frac{1}{m+2}\Lambda^{ik}\lambda_i, \quad \lambda^\gamma = -\frac{1}{m}H^{\beta\gamma}\lambda_\beta - \frac{m+2}{m}\Lambda_{i\beta}H^{\beta\gamma}\lambda^i, \\ &h^k = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda^{jk}h_j, \quad h^\gamma = -\frac{1}{n-m+1}H^{\beta\gamma}h_\beta - \frac{n-m-1}{n-m+1}\Lambda_{i\beta}H^{\beta\gamma}h^i, \\ &\mathcal{H}^a = -\frac{1}{n+1}H^{ba}\mathcal{H}_b, \end{aligned} \qquad (34)$$

образует квазитензор 2-го порядка.

Аналогичные построения проводим, исходя из уравнений (5). В результате построим квазитензоры 2-го порядка[5]:

$$\begin{aligned} &\Lambda^k = -\frac{1}{m+2}\Lambda^{ik}\Lambda_k, \quad \Lambda^\gamma = -\frac{1}{m}H^{\beta\gamma}\Lambda_\beta - \frac{m+2}{m}\Lambda_{i\beta}H^{\beta\gamma}\Lambda^i, \\ &f^k = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda^{jk}f_j, \quad f^\gamma = -\frac{1}{n-m+1}H^{\beta\gamma}f_\beta - \frac{n-m-1}{n-m+1}\Lambda_{i\beta}H^{\beta\gamma}f^i; \\ &\varphi^a = -\frac{1}{n}H^{ba}\varphi_b, \end{aligned} \qquad (35)$$

где функции $\{\Lambda_k\}, \{\Lambda_\alpha\}, \{f_i\}, \{f_\alpha\}, \{\varphi_a\}$ удовлетворяют соответственно уравнениям вида (29)-(33).

Построенные нами объекты 2-го порядка имеют следующий геометрический смысл. Квазитензоры $\{\lambda^a\} \overset{def}{=} \{\lambda^i, \lambda^\alpha\}$, $\{h^a\} \overset{def}{=} \{h^i, h^\alpha\}$, $\{\mathcal{H}^a\}$, $\{\Lambda^a\}$, $\{f^a\}$, $\{\varphi^a\}$ определяют соответственно внутренние инвариантные нормали I-го рода $\vec{\lambda}$, $\vec{h}$, $\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{\Lambda}$, $\vec{f}$, $\vec{\varphi}$ H-распределения. Тензоры 2-го порядка ;

$$\hat{\lambda}_i = \Lambda_i - \lambda_i, \quad \hat{h}_i = f_i - h_i, \quad \hat{\mathcal{H}}_i = \varphi_i - \mathcal{H}_i \tag{36}$$

задают соответственно поля нормалей 2-го рода $\lambda_{m-1}, h_{m-1}, \mathcal{H}_{m-1}$ в смысле Нордена А.П. [3] для M-распределения, а тензоры 2-го порядка

$$\hat{\lambda}_\alpha = \Lambda_\alpha - \lambda_\alpha, \quad \hat{h}_\alpha = f_\alpha - h_\alpha, \quad \hat{\mathcal{H}}_\alpha = \varphi_\alpha - \mathcal{H}_\alpha \tag{37}$$

задают соответственно поля нормалей 2-го рода λ_{n-m-2}, h_{n-m-2}, $\mathcal{H}_{n-m-2}$ в смысле Нордена А.П. для $\mathcal{X}$-распределения. Из (36) и (37) следует, что тензоры 2-го порядка

$$\hat{\lambda}_a = \Lambda_a - \lambda_a, \quad \hat{h}_a = f_a - h_a, \quad \hat{\mathcal{H}}_a = \varphi_a - \mathcal{H}_a \tag{38}$$

определяют поля нормалей 2-го рода в смысле Нордена А.П. для H-распределения, натянутые на соответствующие нормали 2-го рода M-распределения и $\mathcal{X}$-распределения.

6. Рассмотрим величины

$$\begin{aligned} \gamma_i &= a^{kj}\left(\Lambda_{i(jk)} + \Lambda_{(j|i|k)} - \Lambda_{(jk)i}\right), \\ \gamma_\alpha &= a^{\gamma\beta}\left(H_{\alpha(\beta\gamma)} + H_{(\beta|\alpha|\gamma)} - H_{(\beta\gamma)\alpha}\right), \end{aligned} \tag{39}$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla\gamma_i &= (m+2)\Lambda_{ip}\omega^p_n + \gamma_{ik}\omega^k, \\ \nabla\gamma_\alpha &= (n-m+1)H_{\alpha\beta}\omega^\beta_n - (n-m-3)\Lambda_{i\alpha}\omega^i_n + \gamma_{\alpha k}\omega^k. \end{aligned} \tag{40}$$

Учитывая уравнения (40),(29),(32), убеждаемся, что величины

$$B_i = \tfrac{1}{2}(\lambda_i + \gamma_i), \quad B_\alpha = \tfrac{1}{2}(h_\alpha + \gamma_\alpha) \tag{41}$$

подчиняются соответственно уравнениям

$$\nabla B_i = (m+2)a_{ip}\omega^p_n + B_{ik}\omega^k; \quad \nabla B_\alpha = (n-m+1)a_{\alpha\beta}\omega^\beta_n + \Lambda_{i\alpha}\omega^i_n + B_{\alpha k}\omega^k. \tag{42}$$

Наконец, введем в рассмотрение объекты

$$B^i = -\frac{1}{m+2}a^{ik}B_k; \quad \nabla B^i = B^i\omega^n_n - \omega^i_n + B^i_k\omega^k, \tag{43}$$

$$B^\alpha = -\frac{1}{n-m+1}a^{\gamma\alpha}B_\gamma - \frac{1}{n-m+1}\Lambda_{i\gamma}a^{\gamma\alpha}B^i; \quad \nabla B^\alpha = B^\alpha\omega^n_n - \omega^\alpha_n + B^\alpha_k\omega^k. \tag{44}$$

Из (43),(44) вытекает, что объект $\{B^a\} \overset{def}{=} \{B^i, B^\alpha\}$ является квазитензором 2-го порядка. Таким образом, геометрический объект $\{B^a\}$ определяет внутренним инвариантным образом нормаль I-го рода H-распределения.

В случае гиперплоскостного распределения построенная нами нормаль $\vec{B}$ совпадает с нормалью Бляшке $\vec{\beta}$ [1]. Учитывая это, мы назовем нормаль $\vec{B}$ нормалью Бляшке для оснащающего H-распределения данного $\mathcal{H}(M)$-распределения. Отметим, что все построенные ранее нормали $\vec{\lambda}$, $\vec{h}$, $\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{\Lambda}$, $\vec{f}$, $\vec{\varphi}$ являются разновидностями нормали Бляшке. Только нормаль $\vec{B}$ более тесно связана по своим геометрическим свойствам с нормалью Бляшке.

7. Пучки проективных нормалей. а) Мы придерживаемся в основном следующей схемы построения нормалей I-го рода $\mathcal{X}$-распределения и H-распределения. Сначала строим поле квазитензора $\{\nu^i\}$, определяющего поле нормалей I-го рода ν_{n-m} для базисного распределения (M-распределения). Используя компоненты геометрического объекта $\{\nu^i\}$, находим геометрический объект (квазитензор) $\{\nu^\alpha\}$, задающий поле нормалей I-го рода ν_{m+1} $\mathcal{X}$-распределения. Затем вводим в рассмотрение квазитензор $\{\nu^a\} \overset{def}{=} \{\nu^i, \nu^\alpha\}$, который определяет поле нормалей I-го рода ν для H-распределения. Таким образом, нормаль I-го рода $\nu(A)$ определяется как пересечение нормалей $\nu_{n-m}(A)$ и $\nu_{m+1}(A)$: $\nu = \nu_{n-m}(A) \cap \nu_{m+1}(A)$. Как видим, данная конструкция отличается от построений работы [4], где, кроме того, квазитензор $\{\nu^\alpha_n\}$ зафиксирован ($\{\nu^\alpha_n\} = \{a^\alpha_n\}$). Приведем еще один пример (данной конструкции) построения нормалей первого рода M-распределения, $\mathcal{X}$-распределения и H-распределения, необходимый для дальнейшего изложения.

Введем в рассмотрение функции

$$\gamma^i = -\frac{1}{m+2}\Lambda^{ki}\gamma_k, \tag{45}$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\nabla\gamma^i = \gamma^i\omega^n_n - \omega^i_n + \gamma^i_k\omega^k. \tag{46}$$

Отсюда следует, что поле квазитензора второго порядка $\{\gamma^i\}$ определяет поле нормалей I-го рода $\gamma_{n-m}(A)$ базисного M-распределения. Теперь, используя функции γ^i, находим компоненты квазитензора второго порядка $\{\gamma^\alpha\}$:

$$\gamma^\alpha = -\frac{1}{n-m+1} H^{\beta\alpha}\gamma_\beta + \frac{n-m-3}{n-m+1}\Lambda_{i\gamma} H^{\alpha\gamma}\gamma^i. \qquad (47)$$

В каждом центре A $\mathcal{H}(M)$-распределения квазитензор $\{\gamma^\alpha\}$ задает нормаль I-го рода $\gamma_{m+1}(A)$ χ-распределения. Следовательно, поле квазитензора $\{\gamma^a\} \overset{def}{=} \{\gamma^i, \gamma^\alpha\}$ второго порядка порождает поле нормалей 1-го рода $\vec{\gamma}$ данного $\mathcal{H}(M)$-распределения (или H-распределения).

Кроме того, укажем еще один путь построения нормалей I-го рода $\vec{\nu}$ $\mathcal{H}(M)$-распределения. Введем в рассмотрение геометрический объект 2-го порядка $\{a_{\alpha\beta}, \hat{t}_\alpha\}$, где

$$\hat{t}_\alpha = \frac{1}{n-m+1} a_{\alpha\beta\gamma} a^{\beta\gamma} - \frac{1}{n-m+1}\Lambda_{i\alpha}\hat{t}^i; \ \nabla\hat{t}_\alpha = a_{\alpha\beta}\omega^\beta_n + \hat{t}_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa, \qquad (49)$$

$$\hat{t}^i = a^{ij} t_j, \ t_i = \frac{1}{m+2} a_{ijk} a^{jk}; \ \nabla\hat{t}^i = \hat{t}^i\omega^n_n + \omega^i_n + \hat{t}^i_\varkappa \omega^\varkappa_0. \qquad (50)$$

С помощью компонент $\{\hat{t}_\alpha\}$ этого объекта находим квазитензор 2-го порядка $\{\hat{t}^\alpha\}$:

$$\hat{t}^\alpha = a^{\alpha\gamma}\hat{t}_\gamma; \ \nabla\hat{t}^\alpha = \hat{t}^\alpha\omega^n_n + \omega^\alpha_n + \hat{t}^\alpha_\varkappa\omega^\varkappa_0. \qquad (51)$$

Отсюда следует, что геометрический объект $\{-\hat{t}^a\} \overset{def}{=} \{-\hat{t}^\alpha; -\hat{t}^i\}$ задает поле нормалей 1-го рода $\vec{t}$ $\mathcal{H}(M)$-распределения в окрестности 2-го порядка.

в) Функции γ^i (45), γ^α (47), $\mathcal{L}^\alpha$ (10), $\mathcal{L}^i$ (11) позволяют ввести в окрестности второго порядка функции $\mathfrak{M}^a$, где

$$\mathfrak{M}^a = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^a + \gamma^a), \qquad (52)$$

которые задают внутреннюю нормаль 1-го рода $\mathcal{H}(M)$-распределения, инвариантную относительно проективной группы преобразований. В случае гиперплоскостного распределения аффинного пространства нормаль $\{\mathfrak{M}^a\}$ (48) является нормалью Михэйлеску I-го рода $\vec{\mathfrak{M}}$ [1]. Следуя [1], мы назовем нормаль $\mathfrak{M}$ (48) нормалью Михэйлеску I-го рода $\mathcal{H}(M)$-распределения. Отметим,

что подобъекты $\{\mathfrak{M}^i\}$ и $\{\mathfrak{M}^\alpha\}$ квазитензора 2-го порядка $\{\mathfrak{M}^a\}$ задают проективные нормали I-го рода $\mathfrak{M}_{n-m}(A)$ и $\mathfrak{M}_{m+1}(A)$ соответственно M-распределения и χ-распределения, которые назовем нормалями Михэйлеску I-го рода этих распределений.

с) Поля квазитензоров $\{\Phi^i\}$ и $\{\Phi^\alpha\}$ [4], где

$$\Phi^i = \frac{1}{2} a^{ij}[(\tilde{B}_j + 3a_j) - 4t_j],$$
$$\Phi^\alpha = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}[(\hat{B}_\beta + 3\hat{a}_\beta) - 4\hat{t}_\beta], \qquad (53)$$

определяют в окрестности третьего порядка соответственно поле нормалей 1-го рода M-распределения и поле нормалей I-го рода χ-распределения, которые назовем согласно [4] полями нормалей Фубини этих распределений. Следовательно, в окрестности 3-го порядка поле квазитензора $\{\Phi^a\} \overset{def}{=} \{\Phi^\alpha, \Phi^i\}$ задает поле нормалей Фубини 1-го рода $\vec{\Phi}$ $\mathcal{H}(M)$-распределения (или оснащающего H-распределения)

Следует отметить, что построения Э.Л.Алшибая [1] полей проективных нормалей I-го рода для распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве переносятся и на случай $\mathcal{H}(M)$-распределений аффинного пространства. В силу этого для оснащающего H-распределения данного $\mathcal{H}(M)$-распределения в $\mathcal{A}_n$ можно построить поля проективных нормалей $\{S^a\}$ и $\{N^a\}$ 1-го рода [1], внутренним инвариантным образом присоединенные во второй дифференциальной окрестности образующего элемента $\mathcal{H}(M)$-распределения. Компоненты S^a и N^a квазитензоров $\{S^a\}$ и $\{N^a\}$ $\mathcal{H}(M)$-распределения имеют следующее строение:

$$S^a = -\frac{1}{2}(H_{bn} + \frac{1}{n+1}\mathcal{H}_b)H^{ba} = \frac{1}{2}(\mathcal{H}^a - H_{bn}H^{ba}), \qquad (54)$$

$$N^a = -N^{ae} h^{fb} h^{cd} N_{bde}\lambda_{fc}, \qquad (55)$$

где

$$\begin{cases} N_{abc} = (n+1)H_{abc} - H_{ab}\mathcal{H}_c - H_{ac}\mathcal{H}_b + (n+1)H_{cb}H_{an} + 2(n+1)H_{ad}S^d h_{bc}, \\ S_f = h^{ab}(H_{abf} + H_{af}H_{bn} + H_{ab}H_{fn} + H_{fb}H_{an}), \\ \lambda_{ab} = (n+1)H_{abn} - H_{ab}H^{cd}H_{cdn} + S_b S^f H_{af}, \\ N_{ab} = h^{ce}h^{df}H_{cda}H_{efb}; \quad N_{ab}N^{bc} = \delta^c_a. \end{cases} \qquad (56)$$

Проективные нормали I-го рода $\vec{\mathfrak{M}}$ (52), $\vec{\Phi}$ (53), $\vec{S}$ (54), $\vec{N}$ (55) позволяют получить пучки проективных нормалей I-го рода H-распределения.

I) в окрестности 2-го порядка [1]:

$$\hat{\mathfrak{M}}^a(\tau) = \mathfrak{M}^a - \tau(\mathfrak{M}^a - N^a), \tag{57}$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}^a(\varepsilon) = \mathfrak{M}^a - \varepsilon(\mathfrak{M}^a - S^a); \tag{58}$$

2) в окрестности 3-го порядка:

$$\hat{\Phi}^a(\sigma) = \Phi^a - \sigma(\Phi^a - \mathfrak{M}^a),$$
$$\tilde{\Phi}^a(\varepsilon) = \Phi^a - \varepsilon(\Phi^a - N^a), \tag{58}$$
$$\check{\Phi}^a(\varrho) = \Phi^a - \varrho(\Phi^a - S^a),$$

где $\tau, \sigma, \varepsilon, \varrho$ -абсолютные инварианты.

Аналогично находим пучки проективных нормалей I-го рода соответственно M-распределения и χ-распределения.

d). Рассмотрим пучок проективных нормалей $(\mathfrak{M}, N)$ (57) H-распределения. Каждой нормали $\vec{\nu}$ из пучка (57) в соответствии Бомпьяни-Пантази, определяемом соотношениями

$$\nu_a = -H_{ab}\nu^b - H_{an}, \tag{60}$$

будет соответствовать ($n-1$)-мерная плоскость ν_{n-1} -нормаль 2-го рода H-распределения. Нормали $\{\mathfrak{M}^a\}$ соответствует ($n-1$)-мерная плоскость, определенная объектом $\{m_a\}$, а нормали $\{N^a\}$ - ($n-1$)-мерная плоскость, определенная объектом $\{n_a\}$, где

$$m_a = -H_{ab}\mathfrak{M}^b - H_{an}, \quad n_a = -H_{ab}N^b - H_{an}. \tag{61}$$

Таким образом, в каждой H-плоскости H(A) в окрестности 2-го порядка получаем однопараметрический пучок ($n-1$)-мерных плоскостей, определенный объектами

$$\hat{m}_a(\tau) = m_a - \tau(m_a - n_a). \tag{62}$$

Верно и обратное утверждение, что каждой нормали 2-го рода из пучка (62) будет соответствовать нормаль I-го рода из пучка (57). Причем разным нормалям 2-го рода $\hat{m}_a(\tau)$ будут соответствовать разные нормали из пучка (57). При m_a проективная

нормаль $\{\mathfrak{M}^a\}$ совпадает с аффинной нормалью $\{\mathcal{L}^a\}$, т.е. аффинная нормаль попадает в проективный пучок.

Аналогичным образом получаем пучки нормалей 2-го рода H-распределения соответствующих пучкам (58), (59) в соответствии Бомпьяни-Пантази (60):

а) в окресности 2-го порядка:

$$\hat{\mathfrak{M}}_a(\tau) = m_a - \tau(m_a - s_a); \tag{63}$$

в) в окресности 3-го порядка:

$$\hat{\Phi}_a(\sigma) = \varphi_a - \sigma(\varphi_a - m_a),$$
$$F_a(\varepsilon) = \varphi_a - \varepsilon(\varphi_a - n_a), \tag{64}$$
$$\check{F}_a(\varrho) = \varphi_a - \varrho(\varphi_a - s_a),$$

где σ, τ, ϱ -абсолютные инварианты.

Библиографический список

1. А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве//Тр.Геометр.семинара/ ВИНИТИ.1974.Т.5.С.169-193.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр.Моск.матем.о-ва.1953.Т.2.С.275-382.

3. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука.1976.

4. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии:Сб.науч.тр./ВИНИТИ. 1975.Т.7.С.117-151.

5. П о п о в Ю.И. Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калинингр.ун-т. Калининград,1987. 50с. Библиогр. 12 назв. Деп. в ВИНИТИ.21.09.87. № 6807- В87.

6. А л ш и б а я Э.Д. О распределении гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Сообщения АН Груз.ССР. 1970. Т.60.№ 3. С.545-548.