M. Cheshkova

ON RIBAUCOUR TRANSFORMATION FOR
CONGRUENCE OF HYPERSPHERES

A congruence of hyperspheres is studied. A function of radius is constructed so that the congruence is Ribaucour congruence.

УДК 514.75

Ю.И. Шевченко

(*Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград*)

ПЛОСКОСТНАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ СТОЛЯРОВА, АССОЦИИРОВАННАЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Предложен способ задания плоскостной аффинной связности Столярова, ассоциированной с распределением. Она задается полем объекта связности, состоящего из квазитензора связности и объекта плоскостной линейной связности, поэтому является обобщением линейной связности. Объект связности Столярова определяет объекты кручения и кривизны. Доказано, что эти объекты являются тензорами, каждый из которых содержит простой и простейший подтензоры. Описаны условия, когда плоскостная аффинная связность Столярова не имеет кручения или кривизны.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I,\ldots=\overline{1,n})$, деривационные формулы вершин которого имеют вид:

$$dA=\vartheta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\vartheta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A, \tag{1}$$

где ϑ — форма, играющая роль множителя пропорциональности, а структурные формы $\omega^I, \omega^I_J, \omega_I$ проективной группы GP(n), эффективно действующей в пространстве P_n, удовлетворяют уравнениям Картана (см., напр., [1, с. 173])

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J,\; D\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J, \tag{2}$$
$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \delta^I_J \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим общее, иначе говоря, неголономное распределение m-мерных плоскостей (см., напр., [2]), которое представим как n-параметрическое семейство S_n центрированных m-плоскостей P^0_m $(0 < m < n)$.

Замечание 1. Распределение S_n и m-поверхность, представляемая как семейство касательных плоскостей (см., напр., [3]), являются наиболее исследованными подмногообразиями многообразия Беловой [4].

Произведем разбиение значений индексов

$$I = \{i, \alpha\}:\; i, ... = \overline{1, m};\;\; \alpha, ... = \overline{m+1, n}.$$

Специализируем подвижной репер $\{A, A_i, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_i на плоскость P^0_m, причем A — в ее центр. Из деривационных формул (1_2) имеем

$$dA_i = \vartheta A_i + \omega^j_i A_j + \omega^\alpha_i A_\alpha + \omega_i A. \tag{3}$$

Формулы (1_1, 3) дают уравнения стационарности центрированной плоскости P^0_m: $\omega^I = 0,\; \omega^\alpha_i = 0.$ Выбирая n форм ω^I в качестве базисных, запишем уравнения распределения S_n в виде

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iJ} \omega^J. \tag{4}$$

Продолжая [5] уравнения (4), получим

$$\Delta\Lambda^\alpha_{iJ} - \delta^\alpha_J \omega_i = \Lambda^\alpha_{iJK} \omega^K, \tag{5}$$

$$\Delta\Lambda^\alpha_{iJ} = d\Lambda^\alpha_{iJ} + \Lambda^\beta_{iJ} \omega^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{jJ} \omega^j_i - \Lambda^\alpha_{iK} \omega^K_J,\;\; \Lambda^\alpha_{i[JK]} = 0. \tag{6}$$

Часть структурных уравнений (2_1) для форм ω^i представим в следующем виде:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^J \wedge \theta^i_J, \qquad (7)$$

$$\theta^i_J = \delta^\alpha_J \omega^i_\alpha. \qquad (8)$$

Соответствующие двухиндексные формы ω^i_j удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^K \wedge \omega^i_{jK}, \qquad (9)$$

$$\omega^i_{jK} = \Lambda^\alpha_{jK}\omega^i_\alpha - \delta^i_j \omega_K - \delta^i_K \omega_j. \qquad (10)$$

Определение. *Гладкое многообразие со структурными уравнениями (2_1, 7, 9) назовем обобщенным расслоением [6] плоскостных аффинных реперов и обозначим* $A_{m^2+[m]}(P_n)$.

Замечание 2. В обозначении $A_{m^2+[m]}(P_n)$ буква m заключена в квадратные скобки, так как m форм ω^i, которые могли бы превратиться в часть структурных форм аффинной группы $A_{m^2+m} = GA(m)$, входят в состав базисных форм ω^I. Будем называть формы ω^i базисно-слоевыми.

Замечание 3. Обобщенное расслоение $A_{m^2+[m]}(P_n)$ имеет фактор-расслоение [7] плоскостных линейных реперов $L_{m^2}(P_n)$ со структурными уравнениями (2_1, 9), базой которого является пространство P_n (точнее, его область), а типовым слоем — линейная группа $L_{m^2} = GL(m)$, действующая в связке прямых с центром A, принадлежащих плоскости P^0_m.

Для задания аффинной связности А. В. Столярова (см., напр., [8]) в обобщенном расслоении $A_{m^2+[m]}(P_n)$ распространим на него прием Ю. Г. Лумисте [9] задания групповых связностей в главных расслоениях. Преобразуем базисно-слоевые формы ω^i и слоевые формы ω^i_j с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^I

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i - C^i_J\omega^J, \quad \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jK}\omega^K. \tag{11}$$

Возьмем внешние дифференциалы этих форм с помощью структурных уравнений (2_1, 7, 9)

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}^i &= \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^J \wedge (dC^i_J - C^i_K\omega^K_J + \theta^i_J), \\ D\tilde{\omega}^i_j &= \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^K \wedge (d\Gamma^i_{jK} - \Gamma^i_{jL}\omega^L_K + \omega^i_{jK}). \end{aligned} \tag{12}$$

Внесем преобразованные формы (11) в первые слагаемые структурных уравнений (12)

$$\omega^j \wedge \omega^i_j = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + C^j_J\omega^J \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^j \wedge \Gamma^i_{jK}\omega^K + C^j_J\omega^J \wedge \Gamma^i_{jK}\omega^K,$$

$$\omega^k_j \wedge \omega^i_k = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \Gamma^k_{jK}\omega^K \wedge \tilde{\omega}^i_k + \tilde{\omega}^k_j \wedge \Gamma^i_{kL}\omega^L + \Gamma^k_{jK}\omega^K \wedge \Gamma^i_{kL}\omega^L.$$

Здесь во вторых и третьих слагаемых вернемся к исходным формам и подставим результат в уравнения (12)

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}^i &= \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \omega^J \wedge (\Delta C^i_J + \theta^i_J) + (\delta^j_J - C^j_J)\omega^J \wedge \Gamma^i_{jK}\omega^K, \\ D\tilde{\omega}^i_j &= \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \omega^K \wedge (\Delta\Gamma^i_{jK} + \omega^i_{jK}) - \Gamma^k_{jK}\omega^K \wedge \Gamma^i_{kL}\omega^L. \end{aligned} \tag{13}$$

Исходя из этих уравнений, применим теорему Картана — Лаптева [10, с. 82, 83] в обобщенном случае, а именно зададим поле объекта $C = \{C^i_J,\ \Gamma^i_{jK}\}$

$$\Delta C^i_J + \theta^i_J = C^i_{JK}\omega^K, \quad \Delta\Gamma^i_{jK} + \omega^i_{jK} = \Gamma^i_{jKL}\omega^L. \tag{14}$$

Подставим эти дифференциальные уравнения в структурные уравнения (13)

$$D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + Q^i_{JK}\omega^J \wedge \omega^K, \quad D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jKL}\omega^K \wedge \omega^L, \tag{15}$$

где компоненты объектов кручения Q^i_{JK} и кривизны R^i_{jKL} плоскостной аффинной связности Столярова выражаются по формулам

$$Q^i_{JK} = C^i_{[JK]} + (\delta^j_{[J} - C^j_{[J})\Gamma^i_{jK]}, \quad R^i_{jKL} = \Gamma^i_{j[KL]} - \Gamma^k_{j[K}\Gamma^i_{kL]}. \quad (16)$$

Теорема 1. *В обобщенном расслоении плоскостных аффинных реперов* $A_{m^2+[m]}(P_n)$ *аффинная связность Столярова задается полем объекта* $C = \{C^i_J, \Gamma^i_{jK}\}$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (14), причем формы связности (11) подчиняются структурным уравнениям (15), в которые входят объекты кручения* Q^i_{JK} *и кривизны* R^i_{jKL}, *имеющие выражения (16).*

Итак, плоскостная аффинная связность Столярова определяется структурными уравнениями (2_1, 15). Дифференциальные уравнения (14) с учетом обозначений (8, 10) и формулы (16) дают очевидные свойства характеризующих ее объектов:

а) объект связности C состоит из двух подобъектов: квазитензора связности C^i_J, задающего преобразование базисно-слоевых форм ω^i, и объекта плоскостной линейной связности Γ^i_{jK} [7], образующего геометрический объект лишь вместе с фундаментальным квазитензором Λ^α_{iJ} и определяющего связность в расслоении плоскостных линейных реперов $L_{m^2}(P_n)$;

б) объект кручения Q^i_{JK} строится с помощью поля квазитензора связности C^i_J и объекта линейной связности Γ^i_{jK};

в) объект кривизны R^i_{jKL} аффинной связности Столярова есть объект кривизны плоскостной линейной связности, который определяется объектом линейной связности Γ^i_{jK} и его пфаффовыми производными.

Компоненты обычного символа Кронекера δ^I_J удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\delta^I_J = 0, \tag{17}$$

которые проверяются непосредственно:

$$\Delta\delta^I_J = d\delta^I_J + \delta^K_J\omega^I_K - \delta^I_K\omega^K_J = 0 + \omega^I_J - \omega^I_J = 0.$$

Из уравнений (17) имеем дифференциальные уравнения для обобщенных символов Кронекера δ^i_J, δ^α_J

$$\Delta\delta^i_J + \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha = 0, \qquad \Delta\delta^\alpha_J + \delta^i_J\omega^\alpha_i = 0. \tag{18}$$

С помощью уравнений (4) распределения S_n уравнения (18_2) принимают вид

$$\Delta\delta^\alpha_J = -\delta^i_J\Lambda^\alpha_{iK}\omega^K. \tag{19}$$

С помощью обозначений (8, 10), структурных уравнений (2, 9) и дифференциальных уравнений (5, 18_1, 19) продолжим дифференциальные уравнения (14)

$$\Delta C^i_{JK} + C^j_J\omega^i_{jK} + C^i_L(\delta^L_J\omega_K + \delta^L_K\omega_J) - \delta^j_J\Lambda^\alpha_{jK}\omega^i_\alpha - \delta^\alpha_J\delta^i_K\omega_\alpha \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^i_{jKL} + \Gamma^k_{jK}\omega^i_{kL} - \Gamma^i_{kK}\omega^k_{jL} + \Gamma^i_{jJ}(\delta^J_K\omega_L + \delta^J_L\omega_K) +$$
$$+ \Lambda^\alpha_{jKL}\omega^i_\alpha - (\Lambda^\alpha_{jK}\delta^i_L + \delta^i_K\Lambda^\alpha_{jL})\omega_\alpha \equiv 0,$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I. Проальтернируем эти сравнения по нижним индексам с учетом симметрий (6_2) пфаффовых производных Λ^α_{jKL}

$$\begin{gathered}\Delta C^i_{[JK]} + C^j_{[J}\omega^i_{jK]} - \delta^j_{[J}\Lambda^\alpha_{jK]}\omega^i_\alpha - \delta^\alpha_{[J}\delta^i_{K]}\omega_\alpha \equiv 0,\\ \Delta\Gamma^i_{j[KL]} + \Gamma^k_{j[K}\omega^i_{kL]} - \Gamma^i_{k[K}\omega^k_{jL]} \equiv 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Используя (14, 18_1), получим дифференциальные сравнения входящих в формулы (16) агрегатов

$$\Delta(\delta^j_{[J} - C^j_{[J})\Gamma^i_{jK]} + (\delta^j_{[J} - C^j_{[J})\omega^i_{jK]} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^k_{j[K}\Gamma^i_{kL]} + \omega^k_{j[K}\Gamma^i_{kL]} + \Gamma^k_{j[K}\omega^i_{kL]} \equiv 0.$$

Складывая их алгебраически со сравнениями (20) согласно формулам (16) и используя в 1-й сумме выражения (10) трехиндексных форм, получим (ср. [11]):

$$\Delta Q^i_{JK} \equiv 0, \ \ \Delta R^i_{jKL} \equiv 0. \tag{21}$$

Теорема 2. *Объекты кручения* Q^i_{JK} *и кривизны* R^i_{jKL} *плоскостной аффинной связности Столярова являются тензорами.*

Если тензоры кручения Q^i_{JK} и кривизны R^i_{jKL} обращаются в нуль, то формулы (16) дают

$$C^i_{[JK]} = (C^j_{[J} - \delta^j_{[J})\Gamma^i_{jK]}, \ \ \Gamma^i_{j[KL]} = \Gamma^k_{j[K}\Gamma^i_{kL]}. \tag{22}$$

Теорема 3. *Ассоциированная с распределением* S_n *плоскостная аффинная связность Столярова без кручения характеризуется тем, что альтернированные пфаффовы производные компонент квазитензора связности суть альтернированные свертки произведений компонент объекта плоскостной линейной связности и разностей между квазитензором связности и соответствующим обобщенным символом Кронекера.*

Замечание 4. Если тензор кручения Q^i_{JK} обращается в нуль, то плоскостная аффинная связность Столярова вырождается в линейную связность с объектом кривизны R^i_{jKL}, ассоциированную с распределением S_n, которое оснащено специальным полем (22_1) квазитензора C^i_J. Следовательно, наличие кручения Q^i_{JK} является существенным в обобщении линейной связности до соответствующей аффинной связности Столярова.

Теорема 4. *Ассоциированная с распределением* S_n *плоскостная аффинная связность Столярова лишена кривизны лишь тогда, когда альтернированные пфаффовы производные компонент объекта плоскостной линейной связности являются альтернированными свертками произведений компонент этого объекта.*

Из дифференциальных сравнений (21) с учетом уравнений (4) распределения S_n имеем (ср. [12]):

$$\Delta Q^i_{jk} \equiv 0, \quad \Delta Q^i_{j\alpha} - Q^i_{jk}\omega^k_\alpha \equiv 0, \quad \Delta Q^i_{\alpha\beta} - Q^i_{j\beta}\omega^j_\alpha - Q^i_{\alpha j}\omega^j_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta R^{\ i}_{jkl} \equiv 0, \ \Delta R^{\ i}_{jk\alpha} - R^{\ i}_{jkl}\omega^l_\alpha \equiv 0, \Delta R^{\ i}_{j\alpha\beta} - R^{\ i}_{jk\beta}\omega^k_\alpha - R^{\ i}_{j\alpha k}\omega^k_\beta \equiv 0.$$

Теорема 5. *Тензоры кручения* Q^i_{JK} *и кривизны* $R^{\ i}_{jKL}$ *аффинной связности Столярова, ассоциированной с распределением* S_n*, содержат простейшие [13]:* Q^i_{jk}, $R^{\ i}_{jkl}$ *и простые [13]:* $\{Q^i_{jk}, Q^i_{j\alpha}\}$, $\{R^{\ i}_{jkl}, R^{\ i}_{jk\alpha}\}$ *подтензоры.*

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.
2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара. М., 1971. Т. 3. С. 49—93.
3. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14, №2. С. 129—177.
4. *Белова О.О.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Там же. С. 29—67.
5. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.
6. *Шевченко Ю.И.* Общая фундаментально-групповая связность с точки зрения расслоений // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1990. №21. С. 100—105.
7. *Омельян О.М., Шевченко Ю.И.* Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 1. С. 99—107.
8. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

9. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. №37. С. 179—187.

10. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

11. *Шевченко Ю. И.* Аффинная связность Столярова на распределении плоскостей в проективном пространстве // Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Астрахани — 2007». Астрахань, 2007. С. 65—67.

12. *Шевченко Ю. И.* Кручение плоскостной аффинной связности Столярова и оснащение Вагнера // Совр. пробл. диф. геом. и общей алгебры. Саратов, 2008. С. 97—99.

13. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

Yu. Shevchenko

PLANE AFFINE STOLYAROV'S CONNECTION
ASSOCIATED WITH A DISTRIBUTION

In projective space the plane distribution is considered. The way of the giving of the plane affine Stolyarov's connection, associated with distribution is offered. It is set by field of connection object consisting of connection quasitensor and plane linear connection object. Therefore it is generalization of linear connection. Stolyarov's connection object defines torsion and curvature objects. It is proved, that these objects are tensors, each of which contains simple and elementary subtensors. Conditions are described when the plane affine Stolyarov's connection is torsion-free or curvature-free.