Yu. I. Shevchenko

EQUIPMENTS OF SUBMANIFOLDS OF HOLONOMIC AND NONHOLONOMIC CENTROPROJECTIVE MANIFOLDS

A centroprojective manifold is understood as the result of a projectivisation of a differentiable manifold, by which tangent linear spaces of all orders turn into centroprojective spaces of the same dimensions. In this case differ holonomic and nonholonomic centroprojective manifolds, obtained from the corresponding differentiable manifolds and differing by dimensions of tangent spaces of higher than the first order.

A submanifold of the centroprojective manifold and a principal fibering associated with it is considered. The fibering contains, in particular, subfibering of tangent and normal linear frames. Using Laptev′s method a group-connection is given in the associated fibering, including tangent and normal linear connections. Cartan′s equipment and Norden′s normalization of a surface of a projective space are spreading on the submanifold.

It is proved, that a composition equipment (i.e. Cartan′s equipment and Norden′s second genus normalization) of a submanifold reduces group connection, called in this case composite, to tangent and normal connections. It is shown, that Cartan′s plane and a normal of the second genus are absolutely parallel in the composition connection. Linear connections are characterized geometrically with the help of central projections of Cartan′s planes and normals of the second genus. New equipments are introduced, and explained their role and mutual relations.

УДК 514.75

ВВЕДЕНИЕ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ГИПЕРПОЛОСНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Н. Юрьева

(*Калининградский государственный университет*)

Работа является продолжением исследований теории регулярных гиперполосных распределений аффинного пространства [1], [2], которые названы нами H-распределениями [2]. Вводятся обобщённые связности Γ и $\hat{\Gamma}$ соответственно на оснащающем H-распределении (§1) и базисном M-распределении (§2), индуцированные соответственно полями инвариантных нормалей 1-го рода H-распределения и M-распределения. Приведены охваты объектов кривизны и кручения связностей Γ и $\hat{\Gamma}$. С помощью тензоров деформаций $\{\gamma^{\sigma}_{\rho K}\}$, $\{\hat{\gamma}^{i}_{jK}\}$, охваты которых построены в дифференциальной окрестности 2-го порядка, вводятся в рассмотрение новые обобщённые аффинные связности γ и $\hat{\gamma}$ соответственно на H-распределении и M-распределении. Для аффинных связностей γ и $\hat{\gamma}$ указаны охваты тензоров кривизны и кручения. Доказано (§1), что семейство неголономных композиций А.П. Нордена $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$ [3] порождает однопараметрическое семейство аффинных связностей $\overline{R}(\varepsilon)$ на H-распределении. Структурный аффинор $\{P^{\sigma}_{\rho}(\varepsilon)\}$ соответствующей композиции $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$ ковариантно постоянен в связности $\overline{R}(\varepsilon)$. Тензор деформации для аффинной связности $\overline{R}(\varepsilon)$ есть аналог тензора, построенного Видалем [4] для π-структуры на дифференцируемом многообразии. Статья выполнена по теме гранта (95-0-1.0-22). Используется терминология и обозначения работ [1], [2] и следующая схема индексов:

$i, j, k, l, s... = \overline{1,m}$; $\alpha,\beta,\gamma,... = \overline{m+1,n}$; $\rho,\sigma,\pi,\tau,\xi = \overline{1,n}$;

$\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}\, ... = \overline{m+1,n+1}$; $I,J,K,L... = \overline{1,n+1}$.

§1. Аффинные связности, ассоциированные с оснащающим H-распределением гиперполосного H-распределения

1. Пусть Í -распределение аффинного пространства A_{n+1} [1] оснащено полем нормалей 1-го рода $[A,\vec{\nu}(A)]$, где $\vec{\nu} = \nu^{\rho}_{n+1}\vec{e}_{\rho} + \vec{e}_{n+1}$. Величины $\nu^{\rho}_{n+1} = \{\nu^{i}_{n+1},\ \nu^{\alpha}_{n+1}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \nu^{\rho}_{n+1} + \omega^{\rho}_{n+1} = \nu^{\rho}_{n+1,K}\,\omega^{K}. \tag{1.1}$$

Из уравнений (1.1) следует, что при данном выборе поля нормалей 1-го рода Í -распределения, заданного полем квазитензора $\{\nu^{\rho}_{n+1}\}$[1], возможна частичная канонизация [5] репера R^1, при которой $\nu^{\rho}_{n+1}=0$. При этом формы ω^{ρ}_{n+1} становятся главными

$$\omega^{\rho}_{n+1} = \nu^{\rho}_{n+1,K}\,\omega^{K}. \tag{1.2}$$

Такой репер называется репером, адаптированным полю нормалей 1-го рода $[A,\vec{\nu}(A)]$ Í -распределения. Геометрический смысл этой канонизации состоит в том, что вектор $\vec{e}_{n+1}(A)$ совмещают с нормалью $[A,\vec{\nu}(A)]$.

На расслоенном многообразии, базой которого является исходное аффинное пространство A_{n+1}, система форм $\{\omega^{\sigma},\omega^{\sigma}_{\rho}\}$ структурные уравнения которых имеют вид:

$$D\omega^{\sigma} = \omega^{\rho}\wedge\omega^{\sigma}_{\rho} + R^{\sigma}_{LK}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K},\quad D\omega^{\sigma}_{\rho} = \omega^{\tau}_{\rho}\wedge\omega^{\sigma}_{\tau} + R^{\sigma}_{\rho LK}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K},$$

определяет обобщённую аффинную связность Г на оснащающем Н-распределении, где

$$R^{\sigma}_{LK}=\delta^{n+1}_{[L}\nu^{\sigma}_{|n+1|K]},\ R^{\sigma}_{\rho LK}=H_{\rho[K}\nu^{\sigma}_{|n+1|L]} \qquad (1.3)$$

- соответственно объекты кручения и кривизны связности Г.

Таким образом, каждому инвариантному оснащающему полю нормалей $\vec{\nu}[1]$ соответствует инвариантная обобщённая аффинная связность Г на оснащающем Н-распределении, тензоры кривизны и кручения которой находятся по формулам (1.3).

2. Аффинные связности, ассоциированные с Н-распределением, позволяют ввести новые аффинные связности при помощи системы форм $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}$, получающихся из форм ω^{K}, ω^{σ}_{ρ} преобразованием

$$\tilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}=\omega^{\sigma}_{\rho}+\gamma^{\sigma}_{\rho\hat{E}}\,\omega^{K}.$$

Формы ω^{K}, $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}$ подчиняются следующим структурным уравнениям

$$\begin{cases} D\omega^{K}=\omega^{L}\wedge\omega^{K}_{L},\ D\omega^{\rho}=\omega^{\sigma}\wedge\tilde{\omega}^{\rho}_{\sigma}+\tilde{R}^{\rho}_{KL}\omega^{K}\wedge\omega^{L} \\ D\tilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}=\tilde{\omega}^{\tau}_{\sigma}\wedge\tilde{\omega}^{\rho}_{\tau}+\Delta\gamma^{\sigma}_{\rho K}\wedge\omega^{K}, \end{cases}, \qquad (1.4)$$

где

$$\tilde{R}^{\rho}_{KL}=-\delta^{\tau}_{[K}\gamma^{\rho}_{|\tau|L]}+\delta^{n+1}_{[K}\gamma^{\rho}_{|n+1|L]}, \qquad (1.5)$$

$$\begin{cases} \Delta\gamma^{\sigma}_{iK}=\nabla\gamma^{\sigma}_{iK}+\gamma^{\pi}_{iK}\gamma^{\sigma}_{\pi J}\omega^{J}+\Lambda_{iJ}\nu^{\sigma}_{n+1,K}\omega^{J}, \\ \Delta\gamma^{\sigma}_{\alpha K}=\nabla\gamma^{\sigma}_{\alpha K}+\gamma^{\pi}_{\alpha K}\gamma^{\sigma}_{\pi L}\omega^{L}+H_{\alpha\hat{\gamma}}\delta^{\hat{\gamma}}_{L}\nu^{\sigma}_{n+1,K}\omega^{L}. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Согласно теореме Картана - Лаптева [7], чтобы формы $\{\omega^{\rho},\tilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}\}$ в главном расслоенном многообразии $\{\omega^{K},\tilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}\}$ задавали обобщенную аффинную связность γ необходимо и достаточно, чтобы было задано поле тензора деформации, т. е.

$$\Delta\gamma^{\sigma}_{\rho K}=\gamma^{\sigma}_{\rho KJ}\omega^{J}. \qquad (1.7)$$

При этом объектом кручения полученного пространства аффинной связности γ будет объект $\{\tilde{R}^{\rho}_{KL}\}$, (1.5), а кривизны - объект

$$\tilde{R}^{\sigma}_{\rho KL}=\gamma^{\sigma}_{\rho[KL]}. \qquad (1.8)$$

В силу (1.5), (1.6) соотношения (1.8) равносильны тому, что компоненты $\gamma^{\sigma}_{\rho K}$ тензора деформации связности Г удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\gamma^{\sigma}_{\rho\tau}=\tilde{\gamma}^{\sigma}_{\rho\tau K}\,\omega^{K},\ \nabla\gamma^{\sigma}_{\rho,n+1}=\gamma^{\sigma}_{\rho,n+1}\omega^{n+1}_{n+1}+\tilde{\gamma}^{\sigma}_{\rho,n+1,K}\,\omega^{K} \qquad (1.9)$$

Уравнениям (1.9) соответственно удовлетворяют следующие охваты компонент тензора деформации $\{\gamma^{\sigma}_{\rho K}\}$:

$$\gamma^{\sigma}_{\rho\tau}=H^{\sigma\xi}H_{\xi\rho\tau}\overset{def}{=}H^{\sigma}_{\rho\tau},\ \gamma^{\sigma}_{\rho,n+1}=H^{\sigma\xi}H_{\xi\rho,n+1}\overset{def}{=}H^{\sigma}_{\rho,n+1},$$

где $\nabla H^{\sigma}_{\rho\tau}=H^{\sigma}_{\rho\tau K}\omega^{K}$, $\nabla H^{\sigma}_{\rho,n+1}-H^{\sigma}_{\rho,n+1}\omega^{n+1}_{n+1}=H^{\sigma}_{\rho,n+1,K}\omega^{K}$.

Следовательно, при данной инвариантной нормализации Н-распределения (полем нормалей $\vec{\nu}$), внутренним образом порождённым самим Н-распределением, определяется обобщённая аффинная связность γ, которая задаётся формами ω^{ρ}, $\tilde{\omega}^{\sigma}_{\rho}=\omega^{\sigma}_{\rho}+H^{\sigma}_{\rho K}\omega^{K}$.

3. Рассмотрим семейство неголономных композиций А.П. Нордена (в дальнейшем НКН) $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$, внутренним образом связанных с Н-распределением и определённых пучком аффиноров $\{P^{\sigma}_{\rho}(\varepsilon)\}$[3]. При $\varepsilon=0$ матрица $\left\|P^{\sigma}_{\rho}(\varepsilon)\right\|$ имеет вид:

$$\left\|P^{\sigma}_{\rho}\right\|=\left\|\begin{matrix}-\delta^{i}_{j} & 2\chi^{i}_{\alpha}\\ 0 & \delta^{\beta}_{\alpha}\end{matrix}\right\|. \tag{1.10}$$

Компоненты P^{σ}_{ρ} (1.10) аффинора $\{P^{\sigma}_{\rho}(\varepsilon)\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\nabla P^{\sigma}_{\rho}=P^{\sigma}_{\rho K}\omega^{K}$, где

$$\begin{cases}P^{i}_{jK}=-2\chi^{i}_{\alpha}M^{\alpha}_{jK},\ \ P^{i}_{\alpha K}=2\chi^{i}_{\alpha K},\\ P^{\alpha}_{jK}=-2M^{\alpha}_{jK},\ \ P^{\beta}_{\alpha K}=2\chi^{s}_{\alpha}M^{\beta}_{sK},\quad \nabla P^{\sigma}_{\rho K}=P^{\sigma}_{\rho KL}\omega^{L};\end{cases} \tag{1.11}$$

В дифференциальной окрестности второго порядка Í -распределения, используя (1.10) и (1.11), находим охваты компонент тензора деформации $\{\gamma^{\sigma}_{\rho K}\}$ (1.8):

$$\gamma^{\sigma}_{\rho K}=\frac{1}{2}P^{\sigma}_{\tau}P^{\tau}_{\rho K}\overset{def}{=}R^{\sigma}_{\rho K},\ \nabla_{\delta}R^{\sigma}_{\rho K}=0,$$

где

$$\left\|R^{\sigma}_{\rho K}\right\|=\left\|\begin{matrix}-\chi^{i}_{\alpha}M^{\alpha}_{jK} & 2\chi^{i}_{\beta}\chi^{s}_{\alpha}M^{\beta}_{sK}-\chi^{i}_{\alpha K}\\ -M^{\beta}_{jK} & \chi^{s}_{\alpha}M^{\beta}_{sK}\end{matrix}\right\|.$$

Следовательно, неголономная композиция (χ,Λ) порождает на Н-распределении обобщённую аффинную связность $\overline{R}$, которая определяется формами ω^{σ}, $\overline{\omega}^{\sigma}_{\rho}=\omega^{\sigma}_{\rho}-R^{\sigma}_{\rho K}\omega^{K}$. В связности $\overline{R}$ структурный аффинор $\{P^{\sigma}_{\rho}\}$ ковариантно постоянен $dP^{\sigma}_{\rho}-P^{\sigma}_{\tau}\overline{\omega}^{\tau}_{\rho}+P^{\tau}_{\rho}\overline{\omega}^{\sigma}_{\tau}=0$. Аналогичный тензор деформации связности был построен для π структуры на дифференцируемом многообразии в работе Видаля [4].

Такие же построения можно провести для любой НКН из пучка $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$. В результате приходим к выводу.

Теорема 1. В дифференциальной окрестности 2-го порядка семейство $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$ НКН порождает однопараметрическое семейство аффинных связностей $\overline{R}(\varepsilon)$ на Н-распределении. Структурный аффинор $\{P^{\sigma}_{\rho}(\varepsilon)\}$ (при каждом фиксированном ε) соответствующей НКН $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$ ковариантно постоянен в связности $\overline{R}(\varepsilon)$.

§2. Аффинные связности, ассоциированные с базисным М-распределением

1. Рассмотрим М-распределение, оснащённое полем нормалей 1-го рода $\{\nu^i\}$[1], где величины ν^i удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\nu^i - \nu^i\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^i_{n+1} = \nu^i_{n+1,K}\,\omega^K. \tag{2.1}$$

Из уравнений (2.1) вытекает, что при данном выборе поля нормалей 1-го рода $\{\nu^i\}$ базисного М-распределения возможна частичная канонизация репера [5] первого порядка R^1, при которой $\nu^i \equiv 0$. При этом формы ω^i_{n+1} становятся главными

$$\omega^i_{n+1} = \nu^i_{n+1,K}\,\omega^K. \tag{2.2}$$

Такой репер называется репером, адаптированным полю нормалей 1-го рода $\{\nu^i\}$. Геометрический смысл этой канонизации состоит в расположении вектора $\vec{e}_{n+1}$ в инвариантной нормали 1-го рода М-распределения. Продолжая уравнения (2.2), имеем

$$\nabla\nu^i_{n+1,K} - N^i_{\alpha K}\omega^{\alpha}_{n+1} = \nu^i_{n+1,KL}\omega^L,\quad \nu^i_{n+1,[KL]}=0. \tag{2.3}$$

В силу уравнений (2.2), (2.3) формы $\omega^K, \omega^i, \omega^i_j$ удовлетворяют уравнениям

$$D\omega^K = \omega^J\wedge\omega^K_J,\ D\omega^i = \omega^K\wedge\omega^i_K + R^i_{LK}\,\omega^L\wedge\omega^K,\ D\omega^i_j = \omega^K_j\wedge\omega^i_K + R^i_{jLK}\,\omega^L\wedge\omega^K,$$

где

$$R^i_{LK} = \delta^{n+1}_{[L}\nu^i_{|n+1|K]} + \delta^{\alpha}_{[L}N^{\varepsilon}_{|\alpha|K]},\ R^i_{jLK} = M^{\alpha}_{j[L}N^i_{|\alpha|K]} + \Lambda_{j[L}\nu^i_{|n+1|K]}, \tag{2.4}$$

Итак, система форм $\{\omega^i, \omega^i_j\}$определяет обобщённую аффинную связность $\hat{\Gamma}$ на М-распределении, индуцированную полем нормалей 1-го рода $\{\nu^i\}$ М-распределения, объекты кручения $\{R^i_{LK}\}$ и кривизны $\{R^i_{jLK}\}$ которой находятся по формулам (2.4).

Согласно [6] любую обобщённую аффинную связность $\overset{\wedge}{\gamma}$ можно определить при помощи новых форм $\hat{\omega}^i_j$, которые получим из форм ω^K, ω^i_j, преобразованием $\hat{\omega}^i_j = \omega^i_j + \hat{\gamma}^i_{jK}\omega^K$, где $\{\hat{\gamma}^i_{jK}\}$ - тензор деформации связности $\overset{\wedge}{\Gamma}_0$. Для форм $\omega^K, \omega^i, \hat{\omega}^i_j$ имеем следующие структурные уравнения

$$D\omega^K = \omega^J \wedge \omega^K_J,\ D\omega^i = \omega^s \wedge \hat{\omega}^i_s + \hat{R}^i_{KL}\omega^K \wedge \omega^L,\ D\hat{\omega}^i_j = \hat{\omega}^s_j \wedge \hat{\omega}^i_s + \Delta\gamma^i_{jK} \wedge \omega^K, \quad (2.5)$$

где

$$D\hat{R}^i_{KL} = -\delta^s_{[K}\hat{\gamma}^i_{|s|L]} + \delta^\alpha_{[K}N^i_{|\alpha|L]} + \delta^{n+1}_{[K}\nu^i_{|n+1|L]},$$

$$\Delta\hat{\gamma}^i_{jK} = \nabla\hat{\gamma}^i_{jK} + \hat{\gamma}^i_{sK}\hat{\gamma}^s_{jL}\omega^L - M^\alpha_{jK}N^i_{\alpha L}\omega^L - \Lambda_{jK}\nu^i_{n+1,L}\omega^L. \quad (2.6)$$

В силу теоремы Картана - Лаптева [7], формы $\{\omega^i, \hat{\omega}^i_j\}$ задают в главном расслоённом многообразии $\{\omega^K, \hat{\omega}^i_j\}$ обобщенную аффинную связность $\overset{\wedge}{\gamma}$ тогда и только тогда, когда задано поле объекта $\{\hat{\gamma}^i_{jK}\}$, т. е.

$$\Delta\hat{\gamma}^i_{jK} = \hat{\gamma}^i_{jKL}\omega^L. \quad (2.7)$$

При этом объектом кручения полученного обобщённого пространства аффинной связности $\overset{\wedge}{\gamma}$ является объект $\{\hat{R}^i_{KJ}\}$(2.6), а объектом кривизны - объект

$$\hat{R}^i_{jKL} = \gamma^i_{j[KL]}.$$

Уравнения (2.7) можно представить в виде

$$\Delta\hat{\gamma}^i_{jK} = \hat{\gamma}^{-i}_{jKL}\omega^L,\quad \Delta\hat{\gamma}^i_{j\alpha} = \hat{\gamma}^{-i}_{j\alpha L}\omega^L,$$

$$\nabla\hat{\gamma}^i_{j,n+1} - \hat{\gamma}^i_{j,n+1}\overset{\wedge}{\omega}{}^{n+1}_{n+1} - \hat{\gamma}^i_{j,\alpha}\omega^\alpha_{n+1} = \hat{\gamma}^i_{j,n+1,K}\omega^K. \quad (2.8)$$

Уравнениям (2.8) удовлетворяют следующие охваты

$$\hat{\gamma}^i_{jK} = \Lambda^{is}\Lambda_{sjK} - \Lambda^{is}\Lambda_{s\alpha}M^\alpha_{jK} - \Lambda^{is}\Lambda_{s,n+1}\Lambda_{jK},$$

$$\hat{\gamma}^i_{j\hat{\alpha}} = \Lambda^{is}\Lambda_{sj\hat{\alpha}} - \Lambda^{is}\Lambda_{s,n+1}\Lambda_{j\hat{\alpha}} - \Lambda^{is}\Lambda_{s\gamma}M^\gamma_{j\hat{\alpha}} + \Lambda^{is}M^\gamma_{sj}H_{\gamma\hat{\alpha}}.$$

Библиографический список

1. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87 №6807-В87.

2. *Попов Ю.И., Юрьева С.Н.* О нормалях Нордена - Чакмазяна гиперполосного распределения аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып. 25. С. 74-86.

3. *Попов Ю.И.* О неголономных композициях А.П. Нордена оснащающих распределений H(M(Λ))-распределения // Там же, 1986. Вып. 17. С.73-79.

4. *Vidal C.E.* Conexiones en las varietates custproducto y foliaciones // Collect. Math. 1973. Vol.24. №3. P.297-324.

5. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et.appl. (RPR). 1962. V.7. №2. С.231-240.

6. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщённые пространства // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда, 1961. Т.2. Л.: Наука, 1964. С.226-233.

7. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин Л.И.* Очерк научных исследований Германа Фёдоровича Лаптева // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

S. N. Y u r e v a

INTRODUCTION OF AFFINE CONNECTION ON A HYPERSTRIP DISTRIBUTION OF AFFINE SPACE

The article is a continuation of the investigation of regular hyperstrip distributions of the affine space, called H-distributions. Generalized affine connections Ã and $\hat{\Gamma}$ are introduced on the equipping H- distributions and base M- distribution, induced by the corresponding fields of normals of the first genus. Scopes of objects of the curvature and torsion of connections Γ and $\hat{\Gamma}$ are brought. Using strain tensors, whose scopes are constructed in the differential neighborhood of the second order, new connections γ and $\hat{\gamma}$ are introduced into consideration for which scopes of tensors of curvature and torsion are indicated. It is proved that a family of nonholonomic compositions of Norden generate one-parameter family of connections on the H-distribution in each of which a structural affinor of the corresponding collineation is coconstant. A tensor of deformation is found which is analog of the Vidal's tensor for the π -structure on a differentiable manifold.