ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6. 1975

Л.К. Т у т а е в

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИСТОЛКОВАНИЯ ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ МНОГООБРАЗИЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

После выбора канонического репера многообразия в проективном n-мерном пространстве и геометрического истолкования отношения всех его фундаментальных точек к этому многообразию можно одним определенным способом истолковать геометрически все основные инварианты этого многообразия.

§I.Основные соотношения

Уравнения дифференциальных перемещений вершин репера $(M, M_1, \dots, M_n)$ в проективном n-мерном пространстве:

$$dM_J = \omega_J^K M_K \qquad (J, L, K = 0,1,\dots,n) \tag{1.1}$$

Соответствующие структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K \tag{1.2}$$

При перенормировке координат

$$\hat{M}_J = \mu M_J, \quad \mu \neq 0 \tag{1.3}$$

I-формы ω_J^K преобразуются в I-формы [I]:

$$\hat{\omega}_J^K = \omega_J^K + \delta_J^K \, d\ln\mu . \tag{1.4}$$

Совокупность всех перенормировок однородных координат точек в проективном пространстве образует однопараметрический нормальный делитель всей проективной группы [I].Среди $(n+1)$-форм $\hat{\omega}_0^0, \dots, \hat{\omega}_n^n$ независимых от перенормировок координат точек,только n ,так как из системы (I.4):

$$\hat{\omega}_i^i - \hat{\omega}_0^0 = \omega_i^i - \omega_0^0 . \qquad (i = 1,2,\dots)$$

§2. m-параметрическое семейство (m,F) фигур

В проективном пространстве указана фигура F .Уравнения инвариантности ее относительно преобразований (I.I) порождают стационарную подгруппу G_1 проективной группы G . Базис группы G составлен из форм ω_J^K .Подгруппа G_1 выделена системой p линейно независимых уравнений

$$\vartheta \equiv C_K^{\alpha J} \omega_J^K = 0 \qquad (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots = 1,2,\dots,p) \tag{2.1}$$

вполне интегрируемой с постоянными коэффициентами $C_K^{\alpha J}$ [I] В новом базисе группы G с формами ϑ^α в нем формы ϑ^α будут главными,остальные формы этого нового базиса-вторичными.Обозначим символом (m, F) m-параметрическое семейство фигур F ,где

$$1 \leq m \leq p . \tag{2.2}$$

Для задания исходных уравнений семейства (m, F) выделим m форм среди ϑ^{α} и образуем из них базис этого семейства. Пусть такими формами будут

$$\{\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^m\} = \{\vartheta^{\beta}\}, \quad (\beta, \beta_1, \ldots = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Исходными уравнениями семейства (m, F) будут:

$$\vartheta^{\gamma} = a^{\gamma}_{\beta} \vartheta^{\beta} \tag{2.4}$$

Система уравнений (2.4), правильно продолжаемая относительно базиса (2.3) по теореме Г.Ф.Лаптева [I]. Продолжая систему (2.4) получим:

$$\begin{cases} \vartheta^{\gamma} = a^{\gamma}_{\beta} \vartheta^{\beta}, \\ \theta^{\gamma}_{\beta_1} = a^{\gamma}_{\beta_1 \beta} \vartheta^{\beta}, \\ \cdots\cdots \\ \theta^{\gamma}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{q-1}} = a^{\gamma}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{q-1} \beta} \vartheta^{\beta}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\theta^{\gamma}_{\beta_1} = d a^{\gamma}_{\beta_1} + \vartheta^{\gamma}_{\beta_1} - a^{\gamma}_{\beta} \vartheta^{\beta}_{\beta_1} + a^{\gamma_1}_{\beta_1} \vartheta^{\gamma}_{\gamma_1} - a^{\gamma}_{\beta} a^{\gamma_1}_{\beta_1} \vartheta^{\beta}_{\gamma_1} =$$

$$= a^{\gamma}_{\beta\beta_1} \vartheta^{\beta}; \qquad a^{\gamma}_{\beta\beta_1} = a^{\gamma}_{\beta_1 \beta}. \tag{2.6}$$

§3. Канонический репер многообразия (m, F)

Фиксация одной компоненты среди a^{γ}_{β} соответствует на стационарной подгруппе фигуры F одно линейное уравнение относительно форм $\vartheta^{\gamma}_{\beta}$ а следовательно, и форм $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$, как следует из системы (2.6). Если последовательной фиксацией компонентов внутреннего геометрического объекта многообразия (m, F) в системе (2.5) получим систему $(n+1)^2 - m + 1$ линейно независимых уравнений относительно форм $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$, то все формы $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ будут разделены на две части: I). m форм из них останутся независимыми и будут образовывать базис форм многообразия (m, F); 2) остальные формы из $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ будут отнесены к этому базису. При этом условии можно получить канонический репер многообразия (m, F).

Обозначим базисные формы символами $\overset{1}{\varphi}, \overset{2}{\varphi}, \ldots, \overset{m}{\varphi}$. Тогда все формы $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ могут быть представлены в виде

$$\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}} = a^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta} \varphi^{\beta}. \tag{3.1}$$

§4. Дифференциальные смещения фундаментальных точек канонического репера.

I. Касательные $(M_{\mathcal{J}})_T$ к линиям $(M_{\mathcal{J}})$. После аналитического выбора канонического репера R для геометрического исследования многообразия (m, F) надо знать отношение репера R к многообразию (m, F), т.е. каким точкам текущего локального элемента F и какому локальному инвариантному линейному оснащению многообразия (m, F) принадлежат все фундаментальные точки репера R. У репера $(M, M_1, \ldots, M_n)$ его вершины фундаментальные точки. Базисными формами определены базисные, координатные линии (φ^{β}), и

$$d M_{\mathcal{J}} = \omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta} M_{\varkappa}. \tag{4.1}$$

Для геометрического исследования многообразия (m, F) надо еще знать и геометрическое истолкование всех его дифференциальных инвариантов $a^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta}$. Известно, что инварианту $a^{\varkappa}_{\mathcal{J}\beta}$ можно указать не одно геометрическое истолкование.

Спрашивается, есть ли хотя бы один простой, стандартный и в некотором смысле общий способ геометрического истолкования всех основных дифференциальных инвариантов многообразия (m,F)? Систему всех инвариантов $a^{\varkappa}_{\gamma\beta}$ в уравнениях дифференциальных перемещений канонического репера будем называть основной и ее инварианты-основными. Такая система, удовлетворяющая структурным уравнениям многообразия (m,F) определяет это многообразие и только его. В отличие от неё может быть несчетное множество других систем инвариантов того же многообразия-допустимых функций некоторых основных инвариантов, которые не определяют многообразия (m,F). Уравнения касательной $(M_\gamma)_T$ к линии (M_γ), описываемой вершиной M_γ репера $(M, M_1, \dots, M_n)$

$$P = M_\gamma + \lambda\, dM_\gamma . \tag{4.2}$$

Обозначим

$$P = x^\gamma M_\gamma . \tag{4.3}$$

Уравнения прямых $(M_\gamma)_T$ в локальных однородных координатах

$$(M)_T \begin{cases} x^0 = 1 + \lambda\varphi^\beta a^0_{0\beta}, \\ x^1 = \lambda\varphi^\beta a^1_{0\beta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n = \lambda\varphi^\beta a^n_{0\beta} \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(M_n)_T \begin{cases} x^0 = \lambda\varphi^\beta a^0_{n\beta} \\ \dots\dots\dots \\ x^n = 1 + \lambda\varphi^\beta a^n_{n\beta}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Обозначим неоднородные координаты точки

$$x^\gamma_\varkappa = \frac{x^\gamma}{x^\varkappa}, \quad \frac{x^\varkappa}{x^\varkappa} = 1 . \tag{4.5}$$

Из соотношений (4.4.), (4.5) уравнения прямой $(M_\varkappa)_T$ в неоднородных координатах (4.5) запишутся в виде

$$x^\gamma_\varkappa = \frac{\lambda\varphi^\beta a^\gamma_{\varkappa\beta}}{1+\lambda\varphi^\beta a^\varkappa_{\varkappa\beta}} . \tag{4.6}$$

§5. Факторизация аналитических точек

При перенормировке (I.3) формы $\omega^\varkappa_\gamma$ изменяются по формулам (I.4). Следовательно,

$$\hat{\omega}^0_0 = \omega^0_0 + d\ln\mu .$$

Формы $\omega^i_i - \omega^0_0$ инвариантные. Перенормировку координат можно сделать так, что $\hat{\omega}^0_0 = 0$.

Отбрасывая символ $\wedge$, можно $\hat{\omega}^\varkappa_\gamma$ обозначить в виде $\omega^\varkappa_\gamma$, где

$$\omega^0_0 = 0 .$$

Можно поступить иначе-наложить условие на определитель

$$|M M_1 \dots M_n| = const \neq 0 .$$

Тогда

$$\omega^0_0 + \omega^1_1 + \dots + \omega^n_n = 0 .$$

Наконец, факторизацию можно осуществить заменой однородных координат неоднородными, например, по формулам (4.5). При этом необходимо учесть, что все точки гиперплоскости $x^\varkappa = 0$ в формулах (4.5) не будут иметь неоднородных координат. Для геометрического истолкования основных инвариантов воспользуемся заменой однородных координат неоднородными по формулам (4.5).

§6. Геометрическое истолкование инвариантов $a^{\gamma}_{x\beta}$ при $\gamma \neq x$

При смещении вершины M_x по линии (φ^β), т.е. при

$$dM_x = a^{\gamma}_{x\underline{\beta}} \varphi^{\underline{\beta}} M_\gamma , \tag{6.1}$$

где символ $\underline{\beta}$ означает индивидуальный индекс, значение индекса β без суммирования по нем. Базисным формам при этом можно придать значения, например, $\varphi^\beta = 1$, остальные равны нулю. Уравнения касательной $(M_x)_{\beta T}$ к линии $(M_x)_\beta$ теперь, пользуясь соотношениями (4.6), можно написать в виде

$$x^{\gamma}_{x} = \frac{\lambda \varphi^{\underline{\beta}} a^{\gamma}_{x\underline{\beta}}}{1 + \lambda \varphi^{\underline{\beta}} a^{x}_{x\underline{\beta}}}, \tag{6.2}$$

где $\gamma \neq x$ — одно из чисел 0, 1, ..., n; β одно из чисел 1, 2, ..., m. На величины λ, φ^β, $a^{x}_{x\beta}$ наложим условия:

$$\frac{\lambda \varphi^{\underline{\beta}}}{1 + \lambda \varphi^{\underline{\beta}} a^{x}_{x\underline{\beta}}} = 1 . \tag{6.3}$$

Из соотношений (6.1), (6.2) при $\gamma \neq x$ получим

$$x^{\gamma}_{x\beta} = a^{\gamma}_{x\beta} . \tag{6.4}$$

В формулах (6.4) содержится геометрическое истолкование инвариантов $a^{\gamma}_{x\beta}$ при $\gamma \neq x$ в виде: инварианты $a^{\gamma}_{x\beta}$ при условии (6.3) есть неоднородные координаты некоторой точки на касательной $(M_x)_{\beta T}$ к линии, описываемой вершиной M_x канонического репера $(M, M_1, \ldots, M_n)$ при смещении ее по инвариантной линии (φ^β), т.е. при дифференциальном смещении (6.1).

§7. Геометрическое истолкование инвариантов $a^{\gamma}_{x\beta}$ при $\gamma = x$

Для геометрического истолкования инвариантов $a^{\gamma}_{x\beta}$ при $\gamma = x$ рассмотрим условие (6.3), т.е. снова рассмотрим линию, описываемую вершиной M_x и касательную к ней (6.2) при условии (6.3). Обозначим λ^β значение λ, соответствующее точке пересечения прямой (6.2) с гиперплоскостью $(M M_1 \ldots M_{x-1} M_{\gamma+1} \ldots M_n)$, противолежащей вершине M_x в каноническом репере $(M, M_1, \ldots, M_n)$. Это значение удовлетворяет условию

$$1 + \lambda^{\underline{\beta}} \varphi^{\underline{\beta}} a^{x}_{x\underline{\beta}} = 0$$

или при условии $\varphi^{\underline{\beta}} = 1$ и остальным базисным формам со значениями, рвными нулю:

$$a^{x}_{x\beta} = -\frac{1}{\lambda^\beta} . \tag{7.1}$$

Инвариант $a^{x}_{x\beta}$ равен взятой со знаком минус обратной величине параметра λ^β, которой соответствует на касательной (6.2) к линии $(M_x)_\beta$ точка пересечения этой касательной с противолежащей гиперплоскостью канонического репера $(M, \ldots, M_n)$.

З а м е ч а н и е. Некоторые из инвариантов $a^{\gamma}_{x\beta}$ могут быть постоянными, один и тот же инвариант может быть истолкован несколько раз координатами различных инвариантных точек.

П р и м е р 1. Уравнения дифференциальных перемещений канонического репера линии (M) на проективной плоскости [2] можно написать в виде $\frac{dM}{ds}=M_1$, $\frac{dM_1}{ds}=kM+M_2$, $\frac{dM_2}{ds}=M+kM_1$. Локальные уравнения касательной $(M_1)_T$ к линии (M_1), описываемой вершиной M_1 при описании линии (M) точкой M: $x^0=1+\lambda k$, $x^1=0$, $x^2=\lambda$. В пересечении этой касательной со стороной MM_2 канонического репера будет точка $Q_1(1+k,0,1)$. Единичная точка E этого репера определена проективными свойствами линии (M) в окрестности точки M [3]. Поэтому известной будет и координата k по известной $1+k$. Аналогично, на касательной $(M_2)_T$ будет точка $Q_2(2,k,0)$. У кривизны k есть два геометрических истолкования.

П р и м е р 2. Уравнения дифференциальных перемещений линии (M) в проективном трехмерном пространстве можно написать [2] в виде

$$\frac{dM}{ds}=M_1;\quad \frac{dM_1}{ds}=k_1M+k_2M_1+M_2;\quad \frac{dM_2}{ds}=M+\frac{4}{3}k_1M_1+$$
$$+2k_2M_2+M_3;\quad \frac{dM_3}{ds}=\frac{3}{2}M_1+k_1M_2+3k_2M_3.$$

Отсюда следует, что на касательных $(M_1)_T,(M_2)_T,(M_3)_T$ будут соответственно точки $Q_1(1\cdot k_1,k_2,1,0)$, $Q_2(2,\frac{4}{3}k_1,2k_2,1)$, $Q_3(1,\frac{3}{2},k_1,k_2)$. Кривизнам (k_1,k_2) получены по три геометрических истолкования.

П р и м е р 3. Уравнения дифференциальных перемещений канонического репера поверхности (M) в проективном трехмерном пространстве [4]

$$dM=(-\frac{3}{2}\alpha\omega^1-\frac{3}{2}\beta\omega^2)M+\omega^1M_1+\omega^2M_2,$$
$$dM_1=(B\omega^1+b\omega^2)M+(\frac{1}{2}\alpha\omega^1-\frac{1}{2}\beta\omega^2)M_1+\omega^1M_2+\omega^2M_3,$$
$$dM_2=(a\omega^1+A\omega^2)M+\omega^2M_1+(-\frac{1}{2}\alpha\omega^1+\frac{1}{2}\beta\omega^2)M_2+\omega^1M_3,$$
$$dM_3=(A\omega^1+B\omega^2)M+(a\omega^1+A\omega^2)M_1+(B\omega^1+b\omega^2)M_2+$$
$$+(\frac{3}{2}\alpha\omega^1+\frac{3}{2}\beta\omega^2)M_3.$$

Здесь шесть инвариантов α,β,A,B,a,b. Следует заметить и здесь, что в каноническом репере $(MM_1M_2M_3)$ единичная точка E наравне с вершинами инвариантно определена проективными свойствами поверхности (M) в окрестности точки M. Координатные линии $(\omega^1),(\omega^2)$ здесь асимптотические. На касательной $(M)_{\omega^1T}$ находится точка $Q_{01}(1-\frac{3}{2}\alpha,1,0,0)$, на касательной $(M)_{\omega^2T}$ – точка $Q_{02}(1-\frac{3}{2}\beta,0,1,0)$. Аналогично получим касательные

$$(M_1)_{\omega^1T},(M_1)_{\omega^2T},(M_2)_{\omega^1T},(M_2)_{\omega^2T},(M_3)_{\omega^1T},(M_3)_{\omega^2T}$$

и на них соответственно точки

$$Q_{11}(1+B,\frac{1}{2}\alpha,1,0),\quad Q_{12}(1+b,-\frac{1}{2}\beta,0,1),$$
$$Q_{21}(1+a,0,-\frac{1}{2}\alpha,1),\quad Q_{22}(1+A,1,\frac{1}{2}\beta,0),$$
$$Q_{31}(1+A,a,B,\frac{3}{2}\alpha),\quad Q_{32}(1+B,A,b,\frac{3}{2}\beta).$$

Инвариантам a,b получено по два истолкования A,B – по три, и α,β – по четыре.

Список литературы

[1] Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Труды Моск. мат. о-ва", 1953, т. 2, с. 273–382.

[2] Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.–Л., 1937.

[3] Т у т а е в Л.К. К теории линий на проективной плоскости.-"Учен.зап.Белурусского гос.ун-та.Серия мат.", вып.3(52), Минск, 1959.

[4] Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948. 432 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Т.П. Ф у н т и к о в а

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ $(CL)_{1,2}$

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ пар фигур C и L, где C - эллипс; L -прямая, не инцидентная плоскости эллипса [1]. Найдены условия, при которых все коники C конгруэнции $(CL)_{1,2}$ принадлежат одной квадрике.

§1. Канонический репер конгруэнции $(CL)_{1,2}$

Канонический репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ конгруэнции $(CL)_{1,2}$ строится следующим образом: начало A репера R помещается в точку пересечения прямой L с плоскостью соответствующего ей эллипса C, $\bar{e}_3=\bar{AM}$, где M - центр эллипса, конец N вектора e_2 выбирается так, что $\bar{AN}=\bar{MP}$, где $\bar{MP}$ -вектор, сопряженный вектору $\bar{AM}$, и точка P инцидентна эллипсу C, вектор $\bar{e}_1$ направляется по прямой L. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$d\bar{A}=\omega^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}, \quad d\bar{e}_{\alpha}=\omega^{\beta}_{\alpha}\bar{e}_{\beta}, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3), \tag{1.1}$$