УДК 514.75

О. О. Белова [1]

[1] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

olgaobelova@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-4

Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, когда центр описывает поверхность

Продолжается исследование грассманоподобного многообразия $Gr^*(m, n)$ центрированных m-плоскостей. Рассматривается частный случай, когда центр A описывает $(n-m)$-мерную поверхность S_{n-m}. Будем обозначать данное многообразие $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$. Осуществлен аналог сильной нормализации Нордена многообразия $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$. Доказано, что эта нормализация индуцирует связность в расслоении, ассоциированном с многообразием $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$. Дана геометрическая характеристика данной связности с помощью параллельных перенесений.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие, поверхность, связность, параллельные перенесения.

Метод внешних форм Э. Картана [1; 23] в локальной дифференциальной геометрии и теоретико-групповой метод Г. Ф. Лаптева используются многими геометрами (см., напр.,

---

Поступила в редакцию 10.05.2021 г.

[2; 3; 5; 7; 14; 19]), а также в физических теориях [17]. В настоящей работе данные методы применяются для исследования грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей [15], когда центр описывает поверхность.

Грассманоподобное многообразие тесно связано с таким широко известным и популярным многообразием, как многообразие Грассмана [9; 12; 13; 16; 18; 20]. Многообразие Грассмана $Gr(m, n)$ является примером однородного пространства и формирует важный фундаментальный класс проективных многообразий, причем проективное пространство само можно представить как многообразие Грассмана $Gr(1, n+1)$.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_i\}$ ($i, ... = 1, ..., n$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i\,,\ dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A\,, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i, ω_j^i удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$:

$$\begin{gathered} D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j, \\ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i. \end{gathered} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ центрированных m-мерных плоскостей P_m^*. Помещаем вершины A, A_a на плоскость P_m^* и фиксируем центр A (здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, b, ... = 1, ..., m$; $\alpha, \beta, ... = m+1, ..., n$). Из формул (1) очевидны уравнения стационарности плоскости P_m^*

$$\omega^\alpha = 0\,,\ \omega_a^\alpha = 0\,,\ \omega^a = 0\,,$$

поэтому данные формы являются главными. Выбираем формы $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$ в качестве независимых, а остальные главные формы ω^a представляем линейными комбинациями базисных форм $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha . \qquad (3)$$

Уравнения (3) являются уравнениями грассманоподобного многообразия $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей [15]. Компоненты фундаментального объекта $\Lambda = \left\{ \Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab} \right\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$

$$\Delta \Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0 , \ \Delta \Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0 .$$

Из последних сравнений видно, что компоненты Λ_α^{ab} фундаментального объекта Λ образуют тензор, поэтому можно приравнять их нулю, то есть из уравнений (3) получим

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha , \qquad (4)$$

следовательно, центр A описывает $(n-m)$-мерную поверхность S_{n-m}. Будем рассматривать данный случай и использовать обозначение для соответствующего многообразия $\overset{0}{Gr}{}^*\left(m, n\right)$, то есть $\overset{0}{Gr}{}^*\left(m, n\right)$ — это грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, когда центр описывает поверхность S_{n-m}.

При указанной специализации подвижного репера структурные уравнения (2) принимают вид (ср. [15]):

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^a \omega^\beta \wedge \omega_a^\alpha ,$$

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \left(\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b \right) - \omega^\alpha \wedge \omega_a ,$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a - \omega^\alpha \wedge \omega_{b\alpha}^a - \omega_c^\alpha \wedge \omega_{b\alpha}^{ac} ,$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha - \omega^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha - \omega_a^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a},$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\beta^b \wedge \left(\delta_\alpha^\beta \omega_b^a - \delta_b^a \omega_\alpha^\beta\right) - \omega^\beta \wedge \omega_{\alpha\beta}^a,$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \omega_a^\alpha \wedge \omega_\alpha, \; D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta,$$

где

$$\omega_{b\alpha}^a = \delta_b^a \Lambda_\alpha^c \omega_c + \delta_b^a \omega_\alpha + \Lambda_\alpha^a \omega_b, \; \omega_{b\alpha}^{ac} = -\delta_b^c \omega_\alpha^a,$$

$$\omega_{\beta\gamma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^a \omega_a + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta,$$

$$\omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} = \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a, \; \omega_{\alpha\beta}^a = \Lambda_\beta^a \omega_\alpha.$$

Над многообразием $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$ возникает главное расслоение $G\left(\overset{0}{Gr}{}^*\right)$, типовым слоем которого является подгруппа G стационарности центрированной плоскости P_m^*. Главное расслоение $G\left(\overset{0}{Gr}{}^*\right)$ содержит следующие фактор-расслоения: плоскостных линейных реперов, нормальных линейных реперов, аффинное фактор-расслоение, типовым слоем которого служит аффинная факторгруппа группы G, расслоение коаффинных реперов.

В главном расслоении $G\left(\overset{0}{Gr}{}^*\right)$ зададим фундаментально-групповую связность способом Лаптева — Лумисте [6; 11]:

$$\tilde\omega_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - L_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha, \; \tilde\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma,$$

$$\tilde\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \; \tilde\omega_a = \omega_a - L_{a\alpha} \omega^\alpha - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha,$$

$$\tilde\omega_\alpha = \omega_\alpha - L_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta.$$

Согласно теореме Картана — Лаптева, связность в ассоциированном расслоении $G\left(\overset{0}{Gr}{}^*\right)$ определяется с помощью поля объекта связности

$$\Gamma=\{\Gamma^a_{b\alpha},L^{ac}_{b\alpha},\Gamma^\alpha_{\beta\gamma},L^{\alpha a}_{\beta\gamma},\Gamma^a_{\alpha\beta},L^{ab}_{\alpha\beta},L_{a\alpha},\Pi^b_{a\alpha},L_{\alpha\beta},\Pi^a_{\alpha\beta}\}$$

на базе $\overset{0}{Gr}{}^*(m,n)$ следующими дифференциальными сравнениями:

$$\Delta\Gamma^a_{b\alpha}+L^{ac}_{b\alpha}\omega_c-\omega^a_{b\alpha}\equiv 0\,,\ \Delta L^{ac}_{b\alpha}-\omega^{ac}_{b\alpha}\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}+L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a-\omega^\alpha_{\beta\gamma}\equiv 0\,,\ \Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma}-\omega^{\alpha a}_{\beta\gamma}\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta}+L^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b+(\delta^a_b\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}-\delta^\gamma_\alpha\Gamma^a_{b\beta})\omega^b_\gamma-\omega^a_{\alpha\beta}\equiv 0\,,$$

$$\Delta L^{ab}_{\alpha\beta}+(\delta^a_c L^{\gamma b}_{\alpha\beta}-\delta^\gamma_\alpha L^{ab}_{c\beta})\omega^c_\gamma\equiv 0\,,\ \Delta L_{a\alpha}+(\Pi^b_{a\alpha}+\Gamma^b_{a\alpha})\omega_b\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Pi^b_{a\alpha}+L^{cb}_{a\alpha}\omega_c+\delta^b_a\omega_\alpha\equiv 0\,, \tag{5}$$

$$\Delta L_{\alpha\beta}+(\Pi^a_{\alpha\beta}+\Gamma^a_{\alpha\beta})\omega_a-L_{a\beta}\omega^a_\alpha+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Pi^a_{\alpha\beta}+L^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b-\Pi^a_{b\beta}\omega^b_\alpha+L^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma\equiv 0\,,$$

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [8; 10] данного многообразия полями следующих геометрических образов: ($n-m-1$)-плоскостью C_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью P^*_m, и ($m-1$)-плоскостью N_{m-1}, принадлежащей плоскости P^*_m и не проходящей через ее центр. Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha=A_\alpha+\lambda^a_\alpha A_a+\lambda_\alpha A$, а плоскость N_{m-1} — точками $B_a=A_a+\lambda_a A$.

Теорема 1. *Аналог сильной нормализации Нордена многообразия $\overset{0}{Gr}{}^*(m,n)$ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении.*

Доказательство. Находя дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей и требуя относительную инвариантность оснащающих плоскостей, получим

$$\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a \equiv 0\,,\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0\,,\ \Delta\lambda_a + \omega_a \equiv 0\,. \qquad (6)$$

Данное оснащение, задаваемое полем квазитензора $\lambda = \left\{\lambda_\alpha^a,\, \lambda_\alpha,\, \lambda_a\right\}$ на многообразии $\overset{0}{Gr}{}^*\left(m,\, n\right)$, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ :

$$\Gamma_{b\alpha}^a = -\delta_b^a\lambda_\alpha + \mu_\alpha^a\lambda_b + \delta_b^a\mu_\alpha^c\lambda_c\,,$$

$$L_{b\alpha}^{ac} = \delta_b^c\lambda_\alpha^a\,,$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\gamma^\alpha\lambda_\beta - \delta_\beta^\alpha\lambda_\gamma + \delta_\beta^\alpha\mu_\gamma^a\lambda_a\,,\ L_{\beta\gamma}^{\alpha a} = -\delta_\gamma^\alpha\lambda_\beta^a\,,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^a = -\Lambda_\beta^a\lambda_\alpha - \mu_\beta^a\lambda_b\lambda_\alpha^b\,,\ L_{\alpha\beta}^{ab} = -\delta_\beta^a\lambda_\alpha^b\,, \qquad (7)$$

$$L_{a\alpha} = \mu_\alpha^b\lambda_a\lambda_b\,,\ \Pi_{a\alpha}^b = \delta_a^b\lambda_\alpha\,,$$

$$L_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha\lambda_\beta + \lambda_a\lambda_\alpha\mu_\beta^a - \lambda_a\lambda_b\lambda_\alpha^b\mu_\beta^a\,,\ \Pi_{\alpha\beta}^a = -\lambda_\alpha^a\lambda_\beta\,,$$

где $\mu_\alpha^a = \lambda_\alpha^a - \Lambda_\alpha^a$. Функции (7) в силу сравнений (4) и (6) удовлетворяют сравнениям (5).

Данную связность можно охарактеризовать геометрически с помощью параллельных перенесений (см.: [4; 21; 22]).

Теорема 2 (о параллельных перенесениях оснащающей плоскости). *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Оснащающую плоскость C_{n-m-1} в групповой связности $\overset{0}{\Gamma}$ переносить параллельно нельзя (нуль обозначает охваченный объект групповой связности).*

2. *Плоскость C_{n-m-1} переносится параллельно в связности, определяемой подобъектом* $\overset{0}{\Gamma}_2 = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{L}{}^{ab}_{c\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{L}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{0}{L}{}^{ab}_{\alpha\beta}\}$

объекта связности $\overset{0}{\Gamma}$*, тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости* $P_{n-m}=[C_{n-m-1},A]$*, являющейся аналогом нормали 1-го рода Нордена* [8].

3. *Плоскость* C_{n-m-1} *переносится параллельно в линейной комбинации связности* $\overset{0}{\Gamma}$ *тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости* $P_{n-1}=N_{m-1}\oplus C_{n-m-1}$.

Доказательство следует из следующих соотношений:

$$dB_\alpha=\nu B_\alpha+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta B_\beta\,, \qquad (8)$$

$$dB_\alpha=(...)_\alpha^\beta B_\beta+\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha^a B_a+(\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha-\lambda_a\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha^a)A\,, \qquad (9)$$

где $\nu=\theta-\left(\lambda_\alpha-\mu_\alpha^a\lambda_a\right)$.

Равенство (8) получается при приравнивании к нулю компонент ковариантных дифференциалов $\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha^a=0$, $\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha=0$ в выражениях дифференциалов и означает, что плоскость C_{n-m-1} остается на месте.

Дифференциалы точек B_α примут вид (9), если учесть в них охваты (7). Полученное равенство показывает, что обращение в нуль ковариантного дифференциала $\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha^a$ характеризует параллельный перенос плоскости C_{n-m-1} в связности, определяемой подобъектом $\overset{0}{\Gamma}_2$ объекта связности $\overset{0}{\Gamma}$, при котором плоскость C_{n-m-1} смещается в плоскости P_{n-m}.

Из выражений (9) также следует, что обращение в нуль линейной комбинации ковариантных дифференциалов $\overset{0}{\Omega}_\alpha=\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha-\lambda_a\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha^a$ характеризует параллельный перенос плоскости C_{n-m-1} в линейной комбинации связности, при котором плоскость C_{n-m-1} смещается в гиперплоскости P_{n-1}.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А.* Дифференцируемое отображение ранга r аффинного Q_m и проективного P_n пространств // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324, №2. Математика и механика. Физика. С. 35—39.

3. *Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А.* Отображения аффинного пространства в многообразие нуль-пар проективного пространства // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, №2. Математика и механика. Физика. С. 24—28.

4. *Белова О.О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей // ДГМФ. Калининград, 2008. №39. С. 13—18.

5. *Бубякин И.В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства P_n, содержащих конечное число торсов // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, вып. 4. С. 3—16.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

7. *Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А.* Распределение двумерных площадок в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. 2012. Т. 320. №2. Математика и механика. Физика. С. 5—8.

8. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

9. *Степанов С.С.* Векторы, тензоры и формы: Инструкция по применению. М., 2020.

10. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

11. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. №37. С. 179—187.

12. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds. Elsevier, 1993 (North-Holland Mathematical Library).

13. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalization. N. Y., 1996. doi: 10.1002/9781118032633.

14. *Akivis M.A., Shelekhov A.M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. Vol. 177, №522.

15. *Belova O. O.* The Grassmann-like manifold of centered planes // Math. Notes. Springer, 2018. Vol. 104, №6. P. 789—798.

16. *Benini F.* Basics of Differential Geometry & Group Theory : PhD thesis. Trieste, 2018.

17. *Katanaev M. O.* Geometric Methods in Mathematical Physics. 2016. arXiv:1311.0733v3.

18. *Lakshmibai V., Brown J.* The Grassmannian Variety. Geometric and Representation-Theoretic Aspects. Springer, 2015 (Developments in Mathematics; vol. 42).

19. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions // Diff. Geom. and its Appl. 2009. Vol. 27. P. 635—646.

20. *Pfalzgraf J.* A short note on Grassmann manifolds with a view to noncommutative geometry // Petsche H. J., Lewis A., Liesen J., Russ S. (eds.). From Past to Future: Graßmann's Work in Context. Springer, 2011. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0405-5_29.

21. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 675—709.

22. *Rahula M.* The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174, №675.

23. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

O. O. Belova[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-4

The Grassmann-like manifold of centered planes when a surface is described by the centre

Submitted on May 10, 2021

We continue to study of the Grassmann-like manifold $Gr^*(m, n)$ of m-centered planes. A special case is considered when the center A de-

scribes an $(n-m)$-dimensional surface S_{n-m}. We will denote this manifold by $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m, n)$. An analogue of the strong Norden normalization of the manifold $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m, n)$ is realized. It is proved that this normalization induces a connection in the bundle associated with the manifold $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m, n)$. A geometric characteristic of this connection is given with the help of parallel displacements.

In our research we use the Cartan method of external forms and the group-theoretical method of Laptev. These methods are used by many geometers and physicists.

The Grassmann-like manifold is closely related to such a well-known and popular manifold as the Grassmann manifold. The Grassmann manifold is an example of a homogeneous space and forms an important fundamental class of projective manifolds, and the projective space itself can be represented as a Grassmann manifold.

Keywords: projective space, the Grassmann-like manifold, surface, connection, parallel displacements.

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.*: Eli Cartan (1869—1951). Moscow: MCNMO (2014).

2. *Al-Hassani, M.A., Luchinin, A.A.*: Differentiable mapping of the rank r of affine Q_m and projective P_n spaces. *Izv. Tomsk Polytechnic University*, **324**:2, 35—39 (2014).

3. *Al-Hassani M.A., Moldovanova E.A.*: Mapping of an affine space into the manifold of zero pairs of a projective space. *Izv. Tomsk Polytechnic University*, **322**:2, 24—28 (2013).

4. *Belova, O.O.:* The geometrical characteristic of induced connections of Grassmann-like manifold of centered planes. *DGMF*. Kaliningrad. **39**, 13—18 (2008).

5. *Bubyakin, I. V.*: On the structure of complexes of m-dimensional planes of the projective space P_n containing finitely number of torsos. *Math. NEFU Notes*, **24**:4, 3—16 (2017).

6. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.:* Differential-geometric structures on manifolds. *J. Soviet Math.*, **14**:6, 1573—1719 (1980).

7. *Ivlev E. T., Moldovanova E. A.*: Distribution of two-dimensional areas in Euclidean space. *Izv. Tomsk Polytechnic University*, **320**:2, 5—8 (2012).

8. *Norden, A. P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).

9. *Stepanov, S. S.*: Vectors, tensors and forms. Instructions for use. Moscow (2020).

10. *Shevchenko, Yu. I.*: Clothings of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

11. *Shevchenko, Yu. I.*: Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. *DGMF*. Kaliningrad. **37**, 179—187 (2006).

12. *Akivis, M. A., Goldberg, V. V.*: Projective differential geometry of submanifolds. Elsevier, Amsterdam, North-Holland Math. Library (1993).

13. *Akivis, M. A., Goldberg, V. V.*: Conformal differential geometry and its generalization. Wiley, New York (1996). doi: 10.1002/97811180 32633.

14. *Akivis, M. A., Shelekhov, A. M.*: Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. *J. Math. Sci.,* **177**:522 (2011).

15. *Belova, O. O.*: The Grassmann-like manifold of centered planes. *Math. Notes.* Springer, New York, **104**:6, 789—798 (2018).

16. *Benini, F.*: Basics of Differential Geometry & Group Theory. PhD thesis. Trieste (2018).

17. *Katanaev, M. O.*: Geometric Methods in Mathematical Physics, arXiv:1311.0733v3 (2016).

18. *Lakshmibai V., Brown J.*: The Grassmannian Variety. Geometric and Representation-Theoretic Aspects. *Developments in Mathematics*, **42**. Springer, New York (2015).

19. *Mansouri, A.-R.*: An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. *Diff. Geom. and its Appl.*, **27**, 635—646 (2009).

20. *Pfalzgraf, J.* A short note on Grassmann manifolds with a view to noncommutative geometry. In: Petsche H. J., Lewis A., Liesen J., Russ S. (eds.). *From Past to Future: Graßmann's Work in Context*. Springer, Basel (2011). https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0405-5_29.

21. *Polyakova, K. V.*: Parallel displacements on the surface of a projective space. *J. Math. Sci.*, **162**:5, 675—709 (2009).

22. *Rahula, M.*: The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings. *J. Math. Sci.,* **174**:675 (2011).

23. *Scholz, E.*: H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).