Differentiable mapping f: $P_m \to R(Q)$ of projective space P_m into manifold hyperquadrix R(Q) of projective space P_n is studied. Affine connection γ, which is analog of Vranceanu's connection of point correspondence, is found. Some properties of the connection γ are investigated. The connections between characteristic directions of the mapping f and focal manifolds of hyperquadrix family on the one hand and the properties of geodesic for the connection γ are found.

УДК 514.76

В.А. Игошин, Е.К. Китаева

(Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского)

ОБ АФФИННЫХ СИММЕТРИЯХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

На базе результатов [1] и метода пульверизационного моделирования [2,3] получен ряд теорем об аффинной подвижности квазигеодезических потоков (КП), стандартная связность которых является аффинной.

1. Произвольный КП $f \equiv (M,f)$ – это поток обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка на многообразии M конечной размерности m, который локально представляется своим координатным выражением

$$d^2x^i/dt^2 = f^i(x^j, t, dx^j/dt),\ 1 \le i,j \le m.$$

Автономный квазигеодезический поток f – пульверизация, если функции f^i являются однородными 2-ой степени по производным dx^j/dt.

Пусть $D \equiv (\overline{M}, D)$ и $f \equiv (M, f)$ – два КП. Субмерсия Ф: $\overline{M} \to M$ называется гомоморфизмом квазигеодезического потока D в квазигеодезический поток f, если она переводит траектории потока D в траектории потока f.

Гомоморфизм Ф: $(\overline{M},D) \to (M,f)$ называется пульверизационным моделированием, а четверка $((\overline{M},D), \Phi, M)$ – пульверизационной моделью КП (M,f), если D – пульверизация. Диффеоморфизм $\overline{\Phi}: \overline{M} = M \times R \to \overline{N} = N \times R$ называется точечным изоморфизмом КП (M,f), в КП (N,h), если он переводит интегральные кривые потока f в интегральные кривые потока h.

Как показано в работе [3], для произвольного КП (M,f) можно построить пульверизационную модель$((\overline{M},D), \Phi, M)$, тотальное пространство которой есть пространство событий $\overline{M} = M \times R$ КП f, а моделирующая КП f стандартная обобщенная связность $\overline{\Gamma}$ обладает свойством: её геодезические линии совпадают с интегральными кривыми КП f. Гомоморфизм Ф здесь является естественной проекцией Ф= Pr: $\overline{M} = M \times R \to M$: $(x,t) \to x$. При этом точечный изоморфизм КП отождествляется с (аффинным или проективным) геодезическим отображением соответствующих моделирующих связностей.

Векторное поле X на $\overline{M}$, порождающее однопараметрическую группу проективных или аффинных движений КП (M,f), будем называть инфинитезимальной проективной или аффинной точечной симметрией этого потока.

2. Пульверизационное моделирование и результаты И.П. Егорова о размерностях групп движений пространств аффинной связности приводят к ряду теорем о КП, для которых стандартная связность является аффинной.

Ниже эквиаффинность стандартной связности означает симметричность сокращенного тензора кривизны $R_{\alpha\beta}$ этой связности, а под аффинными симметриями понимаются точечные аффинные инфинитезимальные симметрии.

Теорема 1. *Если стандартная связность КП (M,f) – эквиаффинная, то максимальная размерность алгебры Ли аффинных симметрий КП (M,f) равна* $r = m^2 + m(3-k) + (k^2 - 3k + 4)/2$, *где* $m = \dim M$, k – *ранг* $R_{\alpha\beta}$.

Теорема 2. *Если стандартная связность КП (M,f) не является эквиаффинной, то максимальная размерность алгебры Ли аффинных симметрий этого КП не превосходит числа* $m^2 + m + 3$ $(m = \dim M)$.

Теорема 3. *Любой максимально подвижный КП (M,f), стандартная связность которого не является эквиаффинной, локально проективно изоморфен тривиальному КП, т.е. геодезическому потоку евклидова пространства.*

Теорема 4. *Если квазигеодезический поток (M,f) не является проективно эквивалентным тривиальному и* $m = \dim M \geq 3$, *то максимальная размерность его алгебры Ли аффинных симметрий равна* $r = m^2 + 4$. *Такой алгеброй является алгебра с базисом*

$$\begin{gathered}\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ \ldots,\ \partial_n,\ x^2\partial_1,\ x^3\partial_1,\ \partial_2 - x^2x^3\partial_1,\\ x^2\partial_2 + 2x^1\partial_1,\ x^2\partial_3\ (x^2)^3\partial_1/3,\ x^3\partial_3 + x^1\partial_1,\\ x^i\partial_1,\ x^2\partial_j,\ x^3\partial_j,\ x^i\partial_j\ \ (i,j = 4,5,\ldots,m+1),\end{gathered}$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$. *Эту алгебру допускает, например, следующий поток:*

$$\ddot{x}^1 = -2x^2\dot{x}^2\dot{x}^3,\ \ddot{x}^i = 0,\ 2 \leq i \leq m.$$

Формулировка первого утверждения этой теоремы приведена в [4].

Теорема 5. *Если квазигеодезический поток (M,f) не является проективно эквивалентным тривиальному и составляющие $R^{\alpha}{}_{\beta\beta\gamma}$ тензора кривизны моделирующей связности $\overline{\Gamma}$ потока равны нулю, то максимальная размерность его алгебры Ли аффинных симметрий равна $r = m^2 - m + 6$. Такой алгеброй является алгебра с базисом*

$$\partial_1,\ x^2\partial_1,\ x^3\partial_1,\ x^4\partial_1,\ \partial_2 - 2x^3x^4\partial_1,\ x^2\partial_2 + x^1\partial_1,$$
$$x^3\partial_2 - (x^3)^2x^4\partial_1,\ \partial_3,\ x^3\partial_3 + x^1\partial_1,\ x^2\partial_3 - x^4(x^2)^2\partial_1$$
$$\partial_4 - x^2x^3\partial_1,\ x^4\partial_4 + x^1\partial_1,\ \partial_s,\ x^k\partial_s\ (k = 1,2,\dots,n;\ s=5,6,\dots n).$$

Эту алгебру допускает, например, следующий поток:

$$\ddot{x}^1 = -2(x^4\dot{x}^2\dot{x}^3 + 2x^2\dot{x}^3\dot{x}^4),\ \ddot{x}^i = 0,\ \text{при}\ 2 \le i \le m.$$

3. Дальнейшие результаты посвящены аффинным симметриям полных квазигеодезических потоков. Квазигеодезический поток (M, f) называется полным, если каждая его максимальная траектория определена на всей числовой прямой R.

Теорема 6. *Квазигеодезический поток (M, f) является полным тогда и только тогда, когда его стандартная связность $\overline{\Gamma}$ в пространстве событий $\overline{M}$ является полной.*

Доказательство. Пусть $\overline{x}(\tau) = (x(\tau), t(\tau))$ – произвольная негоризонтальная геодезическая моделирующей связности $\overline{\Gamma}$. Негоризонтальность геодезической означает то, что линейная форма dt, являющаяся первым интегралом уравнения геодезических связности $\overline{\Gamma}$, не обращается в нуль вдоль этой геодезической, т.е. $dt(d\overline{x}/d\tau) = dt/d\tau = c = const \ne 0$. После замены параметра τ на геодезической $x(\tau)$ на новый параметр t по формуле $t = c\tau + c_0$ первые m уравнений геодезической $\overline{x}(\tau)$ совпадут с результатом подстановки кривой $x(t)$ в уравнения потока (M, f) , которые будут выполнятся тождественно. Значит, проекция $x(t)$ геодезической $\overline{x}(\tau)$ является траекторией квазигеодезического потока (M,f) (отнесенной к каноническому параметру t). Формула замены параметра τ на параметр t показывает, что максимальные интервалы геодезической $\overline{x}(\tau)$ и её проекции x(t) одновременно совпадают (или не совпадают) со всей числовой прямой R.

Далее считаем, что стандартная связность квазигеодезического потока (M,f) – аффинная.

Теорема 7. *Каждая инфинитезимальная аффинная симметрия полного КП (M,f) сама является полной, т.е. порождает глобальную 1-параметрическую группу аффинных движений КП (M,f).*

Следствие 1. Всякая алгебра Ли инфинитезимальных аффинных симметрий полного КП (M,f) изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли аффинных симметрий этого потока.

В аналитическом случае справедливо

Следствие 2. Попарно эквивалентны следующие утверждения:

1) КП (M,f) аффинно изоморфен геодезическому потоку евклидова пространства ; 2) тензор кривизны КП (M, f) тождественно равен нулю; 3) группа Ли всевозможных аффинных симметрий полного КП (M, f) имеет размерность $r = m^2 + 3m + 2$, где $m = \dim M$; 4) сокращенный тензор кривизны КП (M, f) тождественно равен нулю.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности. Казань, 1965. С. 5 – 179.

2. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Доклады АН СССР. 1991. Т.320. № 3. С. 531 – 535.

3. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование. I, II, III // Изв. вузов. Мат. 1992. № 6. С.63 – 70 ; 1994. № 10. С. 26 – 32; 1995. № 5. С.39 – 50.

4. *Игошин В.А.* О симметриях квазигеодезических потоков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1997. № 28. С. 28 – 30.

V.A. Igoshin, E.K. Kitaeva

ON AFFINE SYMMETRIES OF QUASIGEODESIC FLOWS

An every quasigeodesic flow QF f=(M,F) on a manifold M (dimM=m) locally may be presented by a second order differential equation:

$d^2 x^i / dt^2 = D^i (x^j, t, dx^j/dt)$, $1 \le i, j \le m$.

The series of theorems is obtained on the basis of the results of [1] and the method of pulverization modeling. Some of them concern dimensions of the maximal Lie algebras of affine symmetries of QF (M,f) and other concern affine symmetries of complete QF. For example,

Theorem 3. An every QF of maximal mobility standard connection of which is acuiaffine, locally is projectively equivalent to the trivial QF, that is geodesical flow of Euclidean space.

Theorem 6. A necessary and sufficient condition that QF (M, f) is complete is that his standard connection $\overline{\Gamma}$ of events space $\overline{M}$ is complete.

УДК 514.76

В.М. Исаев, С.Е. Степанов

(Владимирский государственный педагогический университет)

ПРИМЕРЫ КИЛЛИНГОВОЙ И КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВОЙФОРМ

§ 1. Введение и результаты

1.1. Рассмотрим на *n*-мерном многообразии M с линейной связностью ∇ без кручения произвольную геодезическую $\gamma : J \subset \mathbf{R} \to M$, отнесенную к аффинному параметру t. В этом случае $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ для касательного векторного поля $\frac{d\gamma}{dt}$ геодезической γ.

Дифференциальную *p*-форму $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$ для $1 \le p \le n-1$ назовем *киллинговой* [1], если (*p* – 1)-форма $i_{\frac{d\gamma}{dt}}\omega = \mathrm{trace}\left(\frac{d\gamma}{dt} \otimes \omega\right)$ будет ковариантно постоянной вдоль γ. В силу произвольности выбора геодезической γ последнее возможно [1] тогда и только тогда, когда $\nabla\omega \in C^\infty \Lambda^{p+1} M$, что равносильно выполнению уравнения

$$\nabla_{X_0}\omega(X_1, X_2, ..., X_p) + \nabla_{X_1}\omega(X_0, X_2, ..., X_p) = 0 \tag{1.1}$$

для произвольных $X_0, X_1, X_2, ..., X_p \in C^\infty TM$. В работе [1] построен пример киллинговой *p*-формы на многообразии M с эквиаффинной связностью ∇. Здесь будет доказана

Лемма. *Компоненты* $\omega_{i_1 ... i_p}$ *киллинговой p-формы* ω *в n-мерном аффинном пространстве (*$1 \le p \le n-1$*) имеют следующие выражения:*

$$\omega_{i_1 ... i_p} = A_{j i_1 ... i_p} x^j + B_{i_1 ... i_p}, \tag{1.2}$$

где $A_{j i_1 ... i_p}$ *и* $B_{i_1 ... i_p}$*-компоненты постоянных кососимметрических тензоров* A *и* B *в аффинной системе координат* $\{x^1, ..., x^n\}$.