лярной (n-2)-плоскости прямой конгруэнции в пространстве S_n n-1 точек $E_2, E_3, \ldots, E_n$, а центры этих пучков определяют на прямых конгруэнции точки $A_2, A_3, \ldots, A_n$. За точки E_0 и E_1 репера, связанного с прямыми конгруэнции, можно выбрать точку A_2 и полярно-сопряженную с ней точку.

2. Будем называть суперконгруэнциями m-плоскостей пространства S_n такие k-семейства m-плоскостей, для которых k-плоскость, касательная к k-поверхности, изображающей конгруэнцию m-плоскостей на грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$, высекает из бесконечно удаленной $[(m+1)(n-m)-1]$-плоскости $(m+1)(n-m)$-плоскости, касательной к грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$, $(k-1)$-плоскость, размерность которой равна разности размерностей $(m+1)(n-m)-1$ бесконечно удаленной плоскости и размерности $n-1$ сегреаны $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$. В этом случае пересечение этой $(k-1)$-плоскости с сегреаной $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ состоит из конечного числа точек. Число k параметров суперконгруэнции определяется соотношением $k = m(n-m-1)+1$. Сегреана $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ является алгебраической поверхностью порядка $\binom{n-1}{m}$, поэтому число точек пересечения – $\binom{n-1}{m}$.

Т е о р е м а 2. С каждой m-плоскостью суперконгруэнции m-плоскостей пространства S_n можно связать репер первого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждая из $\binom{n-1}{m}$ точек пересечения $(k-1)$-плоскости с сегреаной $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ определяет пучок m-плоскостей, проходящих через m-плоскость суперконгруэнции. Каждому такому пучку соответствует точка B_φ ($\varphi = 0, 1, \ldots, \binom{n-1}{m}-1$) $(n-m-1)$-плоскости, полярной данной m-плоскости, по которой $(m+1)$-плоскость этого пучка пересекается с этой $(n-m-1)$-плоскостью, и $(m-1)$-плоскость, по которой m-плоскость пучка пересекается с данной m-плоскостью, следовательно, полюс A_φ этой $(m-1)$-плоскости в данной m-плоскости. Таким образом, мы получаем $\binom{n-1}{m}$ точек A_φ в данной m-плоскости и столько же точек B_φ в полярной ей $(n-m-1)$-плоскости. Так как при $m>1$, $n>2$:

$$\binom{n-1}{m} > n-m, \quad \binom{n-1}{m} > m+1,$$

то при $m>1$, $n>2$ число точек A_φ больше $m+1$ и из этих точек всегда можно выбрать базис данной m-плоскости, а число точек B_φ больше $n-m$ и из этих точек всегда можно выбрать базис $(n-m-1)$-плоскости, полярной данной m-плоскости.

Библиографический список

1. З а г н е р В.В. Differential geometry of the family of $R'_k S$ in R_n and of the family of totally geodesic $S'_{k-1} S$ in S_{n-1} of positive curvature//Матем. сб. 1942. Т.10. №3. С.165-212.

2. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей//Изв.АН СССР.Сер.матем.1947.Т.11.С.283-308.

3. Р о з е н ф е л ь д Б.А., Половцева М.А., Рязанова Л.А., Юхтина Т. Сегреаны и квазисегреаны и их применение к геометрии семейств прямых и плоскостей//Изв.вузов.Математ.1988.№5.С.50-56.

УДК 514.75

О ДВОЙНЫХ ЛИНИЯХ ПАРЫ (f , Δ_2) В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_3

Г. М а т и е в а
(Ошский педагогический институт)

Рассматривается частичное отображение евклидова пространства E_3, порождаемое заданным семейством гладких линий, и исследуются двойные линии пары (f, Δ_2).

В области Ω евклидова пространства E_3 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $x \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Пусть область Ω отнесена к подвижному ортонормированному реперу $\mathcal{R}=(x, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, который является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства: $\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i$, $\mathcal{D}\omega_i^k = \omega_i^\ell \wedge \omega_\ell^k$, $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$. Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе. Ее обозначим через Σ_F. Так как репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям этой сети, имеем:

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j \quad (\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i, \ \Lambda_{31}^1 = 0). \tag{2}$$

Формулы Френе для линии ω^1 имеют вид:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{e}_1 \ (ds=\omega^1); \ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2; \ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3; \ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2,$$

где Λ_{11}^2 -кривизна, Λ_{21}^3 -кручение линии ω^1.

Псевдофокус F_i^j ($i \neq j$) касательной $(x, \vec{e}_i)$ к линии ω^i сети Σ_F определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{x} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i. \tag{3}$$

Когда точка x смещается в области Ω, точка $F_3^2 \in (x, \vec{e}_3)$ опишет свою область $\widetilde{\Omega}$. Получим отображение $f: \Omega \to \widetilde{\Omega}$ такое, что $f(x) = F_3^2$. Дифференцируя внешним образом (2) и применяя лемму Картана, получим:

$$d\Lambda^k_{ij} = A^k_{ijt}\omega^t,$$

где
$$A^k_{ijt} = \Lambda^k_{ijt} + \Lambda^k_{i\ell}\Lambda^\ell_{jt} + \Lambda^k_{\ell j}\Lambda^\ell_{it}. \qquad (4)$$

Дифференцируем равенство $\vec F^2_3 = \vec x - \frac{1}{\Lambda^2_{32}}\vec e_3$ и применяем обозначение (4) для $i=3$, $j=k=2$. Тогда имеем $d\vec F^2_3 = \omega^i \vec a_3$, где

$$\vec a_i = \vec e_i + \frac{A^2_{32i}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec e_3 - \frac{\Lambda^k_{3i}}{\Lambda^2_{32}}\vec e_k. \qquad (5)$$

В общем случае векторы $\vec a_i$ линейно независимы. Область $\widetilde\Omega$ отнесем к подвижному реперу $\widetilde{\mathcal R} = (F^2_3, \vec a_i)$. При таком выборе реперов $\mathcal R$, $\widetilde{\mathcal R}$ дифференциальные уравнения отображения f имеют вид: $\omega^i = \widetilde\omega^i$.

Линии ℓ, $\tilde\ell = f(\ell)$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках x и $f(x)=y$, пересекаются либо параллельны [1].

Линия ℓ называется двойной линией пары (f, Δ_2), где Δ_2 -двумерное распределение в области Ω, если она является двойной линией отображения f и принадлежит распределению Δ_2 [1].

Пусть линия ω^1 плоская, т.е. $\Lambda^3_{21}=0$. Легко видеть, что векторы $\vec e_1, \vec a_1, \overrightarrow{xF^2_3}$ компланарны, где $\vec a_1 = \vec e_1 + (\Lambda^2_{32})^{-2}A^2_{321}\vec e_3 - (\Lambda^2_{32})^{-1}\Lambda^2_{31}\vec e_2$. Следовательно, линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2). Обратно, пусть линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2). Тогда векторы $\vec e_1$, $\vec a_1$, $\overrightarrow{xF^2_3}$ должны быть компланарными. Из условия компланарности этих векторов получим, что $\Lambda^3_{21} = 0$, т.е. линия ω^1 плоская. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Линия ω^1 заданного семейства является двойной линией пары (f, Δ_2) (где $\Delta_2 = (x, \vec e_1, \vec e_2)$) тогда и только тогда, когда она плоская.

Аналогично можно доказать, что линия ω^2 является двойной линией пары (f, Δ_2) тогда и только тогда, когда векторы $\vec\Lambda_{12}$, $\vec e_2$ коллинеарны ($\vec\Lambda_{12}$ -вектор вынужденной кривизны поля вектора $\vec e_1$ вдоль направления $\vec e_2$).

Т е о р е м а 2. Сеть Σ_F является голономной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) линия ω^1 заданного семейства плоская; 2) векторы $\vec\Lambda_{12}$, $\vec e_2$ коллинеарны; 3) векторы $\vec\Lambda_{13}$, $\vec e_3$ коллинеарны [2].

С л е д с т в и е. Если сеть Σ_F голономна, то ее линии ω^1, ω^2 являются двойными линиями пары (f, Δ_2).

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую распределению Δ_2. Ее касательный вектор в точке x имеет вид: $\vec\ell = \ell^1\vec e_1 + \ell^2\vec e_2 \in \Delta_2(x)$. Тогда $\vec{\tilde\ell} = \ell^i\vec a_i$ -касательный вектор линии $\tilde\ell = f(\ell)$. Учитывая (5):

$$\vec{\tilde\ell} = \Big(\ell^1 - \frac{\Lambda^1_{32}}{\Lambda^2_{32}}\ell^2\Big)\vec e_1 - \frac{\Lambda^2_{31}\ell^1}{\Lambda^2_{32}}\vec e_2 + \frac{A^2_{321}\ell^1 + A^2_{322}\ell^2}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec e_3.$$

Из условия компланарности векторов $\vec\ell$, $\vec{\tilde\ell}$, $\overrightarrow{xF^2_3}$ получим:

$$\Lambda^1_{32}t^2 - \Lambda^2_{32}t - \Lambda^2_{31} = 0, \qquad (6)$$

где $t = \ell^2 : \ell^1$. В общем случае квадратное уравнение имеет два решения. Следовательно, пара (f, Δ_2) имеет не более двух двойных линий. Поэтому, если линии ω^1, ω^2 являются двойными линиями пары (f, Δ_2) одновременно, то никакая другая линия, принадлежащая распределению Δ_2, не может быть двойной линией пары (f, Δ_2). Пусть только линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2), т.е. $\Lambda^3_{21} = 0$. Тогда уравнение (6) имеет решения $t=0$, $t=\Lambda^2_{32}/\Lambda^1_{32}$. Решение $t=0$ определяет направление, определяемое вектором $\vec e_1$, а решение $t=\Lambda^2_{32}/\Lambda^1_{32}$ определяет направление, определяемое вектором $\vec\Lambda_{32} = \Lambda^1_{32}\vec e_1 + \Lambda^2_{32}\vec e_2$ вынужденной кривизны поля вектора $\vec e_3$ вдоль направления $\vec e_2$. Таким образом, если линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2), то другой двойной линией этой пары является интегральная линия поля вектора $\vec\Lambda_{32}$.

Аналогично можно показать, что если линия ω^2 является двойной линией пары (f, Δ_2), то другой двойной линией этой пары является интегральная линия поля вектора $\vec\ell = \Lambda^2_{32}\vec e_1 + \Lambda^3_{21}\vec e_2$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

2. М а т и е в а Г. Об одной сети Френе//Тез.докл.IX Всесоюз. геометр.конф. Кишинев, 1988. С.209.

УДК 514.76

РЕДУКЦИЯ СИЛЬНО ПРИВОДИМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА К СТРУКТУРЕ СТАБИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

И.Д.М е б о н и я

(Тбилисский государственный университет)

Как было замечено в [2], [4], один широкий класс нелинейных связностей в расслоениях реперов высших порядков естественным образом проектируется на множество всевозможных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на единицу большего порядка. Порождаемая связностью дифференциальная система берет на себя определенную геомет-