УДК 574.76

В. С. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

ОТНОСИТЕЛЬНО ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ ПФАФФОВЫХ ФОРМ — НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ КОРРЕКТНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проанализирована основополагающая роль относительно инвариантных систем пфаффовых форм при исследовании в неканонических реперах многообразий фигур в однородных и обобщенных пространствах. Рассмотрены примеры, показывающие, что игнорирование требования относительной инвариантности приводит к принципиальным ошибкам, порождающим теории «на пустом множестве».

Ключевые слова: относительный инвариант, фигура, многообразие, подмногообразие, поверхность, комплекс, конгруэнция, геометрический объект.

Введение
О роли аналитического аппарата в развитии геометрии

Начиная с создания Ферма и Декартом аналитической геометрии и успешного использования математического анализа и дифференциальных уравнений в геометрических исследованиях, аналитический аппарат стал во второй половине XIX в. и особенно в XX в. главным инструментом в дифференциальной геометрии.

Наиболее глубоко было развито тензорное исчисление, использование которого как в классической дифференциальной геометрии многомерных однородных пространств, так и при исследовании дифференцируемых многообразий с различными групповыми структурами, сыграло важную роль в современной дифференциальной геометрии.

Наибольший успех в ее развитии был связан с внедрением в дифференциальную геометрию методов подвижного репера Дарбу, внешних дифференциальных форм Картана и продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева.

Использование этих методов содействовало подлинному расцвету дифференциально-геометрических исследований, так как от задания на многообразии полей геометрических объектов функциями их компонент, преобразующихся при переходе от одной локальной системы координат к другой по определенным законам, перешли к их заданию системами пфаффовых уравнений с использованием уравнений структуры рассматриваемых пространств.

Однако еще в 1934 г. выдающийся геометр XX в. С. П. Фиников писал: «Это необычное развитие метода, который в своих последних обобщениях представляет изумительно стройную и совершенную систему и сам по себе достоин изучения, эти поражающие успехи нашей науки таят в себе и некоторую опасность: аппарат исследования может заслонить самый предмет изучения» [7, с. 7].

К сожалению, это предостережение патриарха геометрии не смогло преодолеть желание некоторых геометров идти по пути дальнейших обобщений, используя все преимущества современного аналитического аппарата при исследовании многообразий в неканонических реперах без анализа инвариантности рассматриваемых систем пфаффовых уравнений и неравенств относительно произвольного изменения свободных (вторичных) параметров реперов, которые по самому́ их определению не влияют на исследуемое многообразие.

Исследование неинвариантных пфаффовых систем и неравенств неизбежно приводило ученых к созданию теорий и работ на «пустом множестве», в которых применяемый аналитический аппарат создавал уверенность в корректности полученных результатов.

В трех научных дискуссиях (1970, г. Томск; 1971, МГУ; 2004, Калининград) и нескольких публикациях автор вскрыл причину появления таких некорректных исследований. Она состоит в том, что исследователи использовали относительно неинвариантные системы пфаффовых уравнений и пфаффовых неравенств, которые изменением только вторичных форм сводятся соответственно к системам неравенств и системам уравнений, что лишает смысла само их рассмотрение.

§1. Геометрические объекты и фигуры в однородном пространстве

Рассмотрим n-мерное однородное пространство E_n с фундаментальной r-членной группой Ли G_r, определенной линейно независимыми формами Пфаффа $\Theta^s\left(u^p, du^q\right)$ и структурными постоянными C^s_{pq} $\left(p,q,s=\overline{1,r}\right)$ [2, с. 285].

Определение 1.1. *Геометрическим объектом ранга* N *пространства* E_n *называется точка* Φ N*-мерного пространства представления* X_N *группы* G_r *в предположении, что все пространства представления группы* G_r *отнесены к семейству реперов заданного однородного пространства* E_n [1, с. 151; 2, с. 294]. *Два геометрических объекта* Φ_1 *и* Φ_2 *называются подобными, если они взаимно охватывают друг друга* [2, с. *300*].

Определение 1.2. Фигурой однородного пространства E_n ранга N называется класс F подобных друг другу геометрических объектов пространства E_n.

Геометрически фигура F — это подмножество точек пространства E_n, которое можно включить в совокупность подмножеств, изоморфную N-мерному пространству представления группы G_r [3, с. 182].

Определение 1.3. *Структурными формами фигуры F называются линейно независимые формы Пфаффа*

$$\Omega^I \overset{def}{=} dX^I - f_s^I\left(X\right)\theta^s\left(u, du\right) \quad \left(I, J, K = \overline{1, N}\right), \qquad (1)$$

обращение в нуль которых фиксирует фигуру.

Г. Ф. Лаптев показал [2, с. 295—296], что система уравнений $\Omega^I = 0$ вполне интегрируема и ее первые интегралы

$$\widetilde{X}^I = F^I\left(X, u\right) \qquad (2)$$

определяют закон преобразования компонент геометрического объекта $\Phi \in F$ — координат фигуры F.

Доказано [3, с. 182—185], что произвольная фигура $F \subset E_n$ характеризуется четырьмя арифметическими инвариантами (ранг, жанр, тип и характеристика фигуры).

§ 2. Многообразия и подмногообразия фигур

m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур $F \subset E_n$ задается правильно продолжаемой системой уравнений Пфаффа

$$\Theta^a \overset{def}{=} \Omega^a - \lambda_i^a \Omega^i = 0 \quad \left(i, j, k = \overline{1, m};\ a, b, c = \overline{m+1, N}\right). \qquad (3)$$

Определение 2.1. *Система форм Пфаффа $\left\{\omega^\alpha\right\}$, ассоциированная с многообразием $\mathfrak{M}_m$, называется относительно инвариантной, если*

$$\delta\omega^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \omega^\beta \quad \left(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, M}\right). \qquad (4)$$

Система уравнений Пфаффа

$$\omega^{\alpha} = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющая условиям (4), также называется *относительно инвариантной.*

Теорема 2.1. *При произвольном изменении вторичных параметров относительно инвариантная система уравнений Пфаффа (5) преобразуется в эквивалентную ей систему.*

Доказательство. Используя (4), находим:

$$\tilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha} + \delta\omega^{\alpha} = \left(\delta^{\alpha}_{\beta} + \lambda^{\alpha}_{\beta}\right)\omega^{\beta} = 0. \tag{6}$$

Так как определитель системы линейных однородных уравнений (6) отличен от нуля, то $\omega^{\beta} = 0$. Наоборот: если $\omega^{\alpha} = 0$, то и $\tilde{\omega}^{\alpha} = 0$. Чтд.

Теорема 2.2. *Вполне интегрируемая система форм Пфаффа ω^{α} относительно инвариантна.*

Доказательство. Пусть формы Пфаффа образуют вполне интегрируемую систему, то есть

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta}. \tag{7}$$

Переходя в формулах (7) к эквивалентной совокупности их числовых значений, получим:

$$\underset{\overset{\|}{0}}{d\omega^{\alpha}(\delta)} - \delta\omega^{\alpha}(d) = \begin{vmatrix} \omega^{\beta}(d) & \omega^{\alpha}_{\beta}(d) \\ \omega^{\beta}(\delta) & \omega^{\alpha}_{\beta}(\delta) \end{vmatrix} = \omega^{\beta}(d)\omega^{\alpha}_{\beta}(d), \tag{8}$$

так как $\omega^{\alpha}(\delta) = 0$. Приходим к формулам (4), характеризующим относительную инвариантность системы форм ω^{α}.

Следствие. *Система пфаффовых уравнений (3) многообразия $\mathfrak{M}_m$ относительно инвариантна.*

Действительно, в силу правильной продолжаемости системы пфаффовых уравнений (3) [2, с. 323] система пфаффовых форм Θ^{a} относительно инвариантна:

$$\Delta\lambda_i^a = \lambda_{ij}^a\Omega^j, \quad d\Theta^a = \Theta^b \wedge \left(\Omega_b^a - \lambda_i^a\Omega_b^i\right) + \lambda_{ij}^a\Omega^i \wedge \Omega^j, \qquad (9)$$

где

$$\Delta\lambda_i^a = d\lambda_i^a - \lambda_j^a\Omega_i^j + \lambda_i^b\Omega_b^a - \lambda_i^a\lambda_j^b\Omega_b^i + \Omega_i^a. \qquad (10)$$

Следовательно,

$$\delta\Theta^a = \Theta^b\left(\Pi_b^a - \lambda_i^a\Pi_b^i\right). \qquad (11)$$

Чтд.

Пусть $1 \le r < m$. Рассмотрим систему пфаффовых уравнений

$$\Theta^a = 0, \ \upsilon^{\breve{i}} \equiv \Omega^{\breve{i}} - \mu_{\hat{i}}^{\breve{i}}\Omega^{\hat{i}} \ \left(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1,r}; \ \breve{i}, \breve{j}, \breve{k} = \overline{r+1,m}\right). \qquad (12)$$

Замыкая ее, получим:

$$\Theta^b \wedge \left(\Omega_b^a - \lambda_i^a\Omega_b^i\right) + \Omega^i \wedge \Delta\lambda_i^a = 0, \quad \upsilon^{\breve{j}} \wedge \upsilon_{\breve{j}}^{\breve{i}} + \Omega^{\hat{i}} \wedge \Delta\mu_{\hat{i}}^{\breve{i}} = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{gathered} \upsilon_{\breve{j}}^{\breve{i}} = \Omega_{\breve{j}}^{\breve{i}} + \lambda_{\breve{j}}^a\Omega_a^{\breve{i}}, \ \Delta\mu_{\hat{i}}^{\breve{i}} = \nabla\mu_{\hat{i}}^{\breve{i}} + \Omega_{\hat{i}}^{\breve{i}} + \\ + \left(\lambda_{\hat{i}}^a + \lambda_{\breve{j}}^a\mu_{\hat{i}}^{\breve{j}}\right)\Omega_a^{\breve{i}} - \mu_{\hat{j}}^{\breve{i}}\mu_{\hat{i}}^{\breve{j}}\Omega_{\breve{j}}^{\hat{j}} + \left(\lambda_{\hat{i}}^a\mu_{\hat{j}}^{\breve{i}} + \lambda_{\breve{j}}^a\mu_{\hat{j}}^{\breve{i}}\mu_{\hat{i}}^{\breve{j}}\right)\Omega_a^{\hat{j}}. \end{gathered} \qquad (14)$$

Из (2.11, 2.7) следует, что только при выполнении пфаффовых уравнений

$$\Delta\mu_{\hat{i}}^{\breve{i}} = \mu_{\hat{i}j}^{\breve{i}}\Omega^j \qquad (15)$$

система форм $\upsilon^{\breve{i}}$ будет относительно инвариантной, а при отсутствии этих условий рассматривать систему (12) не имеет смысла, так как она ничего не определяет на многообразии $\mathfrak{M}_m$.

§ 3. О необходимости выполнения требования относительной инвариантности пфаффовых систем в дифференциальной геометрии

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих наиболее часто встречающиеся ошибки, связанные с использованием относительно неинвариантных пфаффовых систем.

1. Пусть S — гиперповерхность в n-мерном аффинном пространстве. Помещая начало A репера в точку гиперповерхности S и направляя базисные векторы $\vec{e}^{\,i}$ $\left(i, j, k = \overline{1, n-1}\right)$ в касательной гиперплоскости, получим:

$$\omega^n = 0,\ \omega_i^m = \lambda_{ij}\omega^j \ \left(\lambda_{ij} = \lambda_{ji}\right). \tag{16}$$

Система $n-m-1$ пфаффовых уравнений

$$\theta^{\breve{i}} \equiv \omega^{\breve{i}} - \mu_{\hat{i}}^{\breve{i}}\omega^{\hat{i}} = 0 \ \left(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1, r};\ \breve{i}, \breve{j}, \breve{k} = \overline{r+1, m}\ \right) \tag{17}$$

не определяет на гиперповерхности S r-мерной поверхности, так как она относительно неинвариантна и изменением только вторичных параметров превращается в систему неравенств:

$$\tilde{\theta}^{\breve{i}} = \tilde{\theta}^{\breve{i}} + \delta\tilde{\theta}^{\breve{i}} = \left(\delta_{\breve{j}}^{\breve{i}} - \lambda_{\breve{j}}^{\breve{i}}\right)\theta^{\breve{j}} + \Omega^{\hat{i}}\, \overset{\circ}{\Delta}\, \mu_{\hat{i}}^{\breve{i}} \neq 0. \tag{18}$$

2. Пусть K — линейчатый комплекс в трехмерном проективном пространстве P_3. Располагая вершины A_1, A_2 на луче комплекса, запишем его пфаффово уравнение в виде:

$$\omega_2^4 = a\omega_1^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^3 \ \left(\omega_1^3 \wedge \omega_1^4 \wedge \omega_2^3 \neq 0\right). \tag{19}$$

Уравнение

$$\omega_2^3 = 0 \tag{20}$$

не определяет в этом комплексе двумерного линейчатого многообразия — конгруэнцию, так как оно относительно неинвариантно:

$$\delta\omega_2^3 = \left(\pi_2^2 - \pi_3^3\right)\omega_2^3 - \omega_2^4\pi_4^3 + \omega_1^2\pi_2^1 - \omega_2^1\pi_1^2. \tag{21}$$

3. Пусть M_n — дифференцируемое многообразие класса C^∞ со структурными базовыми 1-формами ω^i и слоевыми 1-формами θ^α $\left(i, j, k = \overline{1, n};\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{n+1, N}\right)$. Замыкая квадратичные уравнения

$$d\omega^k = \omega^i \wedge \omega_i^k, \tag{22}$$

приходим к уравнениям:

$$d\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k + \omega^j \wedge \omega_{ij}^k. \tag{23}$$

Система форм Пфаффа

$$\theta_{ij}^k = \omega_{ij}^k - \omega_{ji}^k \tag{24}$$

является линейной комбинацией только базовых форм ω^i [5, с. 71]:

$$\theta_{ij}^k = h_{ij,p}^k \omega^p. \tag{25}$$

Изменениями только вторичных параметров слоевых форм все функции $h_{ij,p}^k$ можно привести к нулю. Поэтому так называемых «неголономных дифференцируемых многообразий», характеризующихся неравенствами $\theta_{ij}^k \neq 0$, не существует.

4. Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве A_3 двумерное вырожденное многообразие пар точек $F = \{A, B\}$, когда точка A описывает поверхность, а точка B — линию. Обозначим его символом $(A, B)_{2,1}$. Отнесем многообразие $(A, B)_{2,1}$ к реперу $\{A, \vec{e}_I\}$ $(I, J, K = 1, 2, 3)$, поместив конец вектора $\vec{e}_3$ в точку B и расположив векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ в касательной плоскости к поверхности (A).

Тогда структурными формами фигуры $F = \{A, B\}$ будут формы Пфаффа

$$\omega^I,\ \theta^I \overset{def}{=} \omega^I + \omega_3^I, \tag{26}$$

а многообразие $(A, B)_{2,1}$ задается системой уравнений Пфаффа

$$\omega^3 = 0,\ \omega_i^3 = \lambda_{ij}\omega^j,\ \theta^2 = \mu\theta^1,\ \theta^3 = \nu\theta^1\ \left(|\mu| + |\nu| \neq 0\right), \tag{27}$$

так как (A) — поверхность, а (B) — линия $(i, j, k = 1, 2;$ $\theta^1 \neq 0;\ \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0)$.

Анализируя систему (27), убеждаемся, что многообразия $(A,B)_{2,1}$ существуют и определяются с произволом одной произвольной функции двух аргументов.

В репере $\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ остались четыре свободных вторичных параметра, так как из (26), (27) следует:

$$\pi^I = 0,\ \pi_1^3 = 0,\ \pi_2^3 = 0,\ \pi_3^I = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим систему пфаффовых уравнений

$$\begin{gathered}\omega^3 = 0,\ \omega_i^3 = \lambda_{ij}\omega^j,\\ \theta^I = h^I\omega^1 \quad \left(\left|h^1\right| + \left|h^2\right| + \left|h^3\right| \neq 0\right).\end{gathered} \tag{29}$$

Первая группа уравнений здесь такая же, как и в системе (27). Она определяет поверхность, описанную точкой A. Последняя же группа пфаффовых уравнений задана относительно неинвариантной системой уравнений

$$V^I \equiv \theta^I - h^I\omega^1 = 0, \tag{30}$$

так как

$$dV^I = V^K \wedge \omega_K^I + \omega^1 \wedge \left(dh^I + h^K\omega_K^I - h^I\omega_1^1\right) - h^I\omega^2 \wedge \omega_2^1. \tag{31}$$

Она не определяет линии (B). Действительно, из формулы

$$d\vec{B} = h^I\vec{e}_I\omega^1 \tag{32}$$

следует, что вектор $\vec{m}$ касательной к $(\vec{B})$ при фиксации точки B менял бы свое направление, чего быть не может.

В цикле статей [3 — 6; 8] доказана необходимость использования только относительно инвариантных пфаффовых систем уравнений при исследовании многообразий в однородных и обобщенных пространствах и проанализированы принципиальные ошибки, возникающие у авторов научных публикаций, игнорирующих это требование.

Список литературы

1. *Вагнер В. В.* Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии. Дополнение к книге Веблена и Уайтхеда «Основания дифференциальной геометрии». М., 1949.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. ГИТТЛ. 1953. №2. С. 275—383.

3. *Малаховский В. С.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометрического семинара ВИНИТИ АНСССР. М., 1969. Т. 2. С. 179—206.

4. *Малаховский В. С.* К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Известия высш. учеб. заведений. Математика. 1972. №9 (124), С. 54—65.

5. *Малаховский В. С.* О голономности расслоения реперов на дифференцируемом многообразии // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 35. Калининград, 2004. С. 69—78.

6. *Малаховский В. С.* Правильная продолжаемость системы пфаффовых уравнений вырожденных многообразий оснащенных и индуцированных фигур // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 40. Калининград, 2009. С. 84—94.

7. *Фиников С. П.* Теория поверхностей. М.; Л., 1934.

8. *Malakhovsky V. S.* About some restrictions of application of Cartan's method of exterior forms and the method of the moving frame in differential geometry // Избранные вопросы современной математики. Калининград, 2005. С. 31—33.

V. Malakhovsky

RELATIVELY INVARIANT SYSTEMS OF PFAFFIAN FORMS
AS A NECESSARY CONDITION OF CORRECTNESS
OF DIFFERENTIAL-GEOMETRICAL RESEARCHES

It is shown the principal role of relatively invariant systems of pfaffian's forms in differential geometry. Some examples of principal mistakes by using relatively not invariant forms are given.