Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 вытекает, что если нормальная связность $\nabla^\perp$ плоская, то $\overline{R}(X,Y)Z=\frac{1}{\rho^2}(\overline{g}(Y,Z)X-\overline{g}(X,Z)Y)$, т.е. $\overline{M}$ локально есть пространство постоянной кривизны $\frac{1}{\rho^2}$. Обратно, если $\overline{M}$ есть пространство постоянной кривизны $\frac{1}{\rho^2}$, то $<R^\perp(X,Y)\Omega Z,\Omega W>=0$. Пусть X_i, $i=1,...,n$ – базис T_pM. Тогда $\Omega_i=\Omega X_i$, τ–базис $T_p^\perp$. Имеем $<R^\perp(X_i,X_j)\Omega_k,\Omega_m>=0$. В силу (4) $[A_\tau,A_\Omega]=0$, т.е. $R^\perp=0$, нормальная связность $\nabla^\perp$ – плоская. В силу симметричности построения получаем утверждение теоремы.

Библиографический список.

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.:Наука, 1987. Т.2. 414с.

M. A. C h e s h k o v a

TO GEOMETRY N-SURFACES IN A EUCLIDEAN SPACE E^{2n+1}

In a Euclidean space E^{2n+1} are considered two smooth n–Surfaces M, $\overline{M}$ and diffeomorphism $f:M\to\overline{M}$. Case, when tangents n-planes in is investigated appropriate points $p\in M$, $f(p)\in\overline{M}$ are orthogonal, $\overline{pf(p)}$ normal to M and normal to $\overline{M}$, and $|\overline{pf(p)}|$=const. We shall name such transformation f as transformation B.

Theorem. If f there is the transformatiom B, the following two statements are equivalent: 1) surfaces M, $\overline{M}$ have of plane normal connection; 2) M, $\overline{M}$ locally there is the space of constant curvature $\frac{1}{\rho^2}$.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМ ТЕТРАЭДРОМ

С. В. Ш м е л е в а

(*Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота*)

В трехмерном проективном пространстве $\mathbf{P_3}$ исследован класс **T** конгруэнций невырожденных линейчатых квадрик **Q**, четыре фокальные точки $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, которых образуют автополярный тетраэдр третьего рода квадрики **Q** [1, с.

268], в котором $A_0 A_i$, $A_3 A_i$ (i = 1,2) — прямолинейные образующие, причем A_0 — фокальная точка второго порядка [2], а фокальная поверхность (A_3) вырождается в линию. Доказано, что фокальные поверхности (A_0), (A_1), (A_2) являются одной и той же квадрикой, а фокальные поверхности прямолинейной конгруэнции ($A_0 A_3$) вырождаются в линии, касательные к которым проходят через фокусы F_1 и F_2 луча $A_1 A_2$ прямолинейной конгруэнции ($A_1 A_2$), один из которых также описывает линию.

1. Отнесем конгруэнцию **T** к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Тогда уравнение квадрики **Q** приводится к виду:

$\mathbf{x^1x^2 - x^0x^3 = 0}$ (1.1)

Теорема 1.1. Конгруэнции **T** существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Из определения конгруэнции **T** следует, что она входит в класс конгруэнций **N** [3]. Учитывая в уравнениях (1) работы [3] геометрические характеристики конгруэнции **T**, приводим ее замкнутую систему дифференциальных уравнений к виду:

$$\begin{cases} \omega^3_0 = 0,\ \omega^0_3 = 0,\ \omega^j_i = 0,\ \omega^3_i = \omega^j,\ \omega^0_i - \omega^j_3 = \lambda\omega^j, \\ \omega^i_3 = \omega^i + \omega^j,\ \omega^0_0 + \omega^3_3 = 0,\ \omega^1_1 + \omega^2_2 = 0,\ 2\omega^1_1 = \alpha(\omega^1 + \omega^2), \\ 2\omega^0_0 = \beta(\omega^1 + \omega^2) + \alpha\omega^2,\ d\lambda + 2\lambda\omega^0_0 = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} d\alpha \wedge (\omega^1 + \omega^2) + (\alpha^2 + 2\lambda + 4)\, \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ d\alpha \wedge \omega^2 + d\beta \wedge (\omega^1 + \omega^2) + \alpha\beta\omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем $\omega^i \overset{def}{=} \omega^i_0$, $\mathbf{i, j, k = 1,2;\ i \neq j}$ и по индексам **i, j** суммирование не производится. Имеем: $\mathbf{q = 2,\ s_1 = 2,\ s_2 = 0,\ Q = N = 2}$. Следовательно, система (1.2), (1.3) — в инволюции и определяет конгруэнции T с произволом двух функций одного аргумента.

Так как конгруэнция квадрик — это двумерное многообразие, то система структурных форм

$$\{\omega^3_0,\ \omega^0_3,\ \omega^3_i - \omega^j,\ \omega^0_i - \omega^j_3,\ \omega^j_i,\ \omega^0_0 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3\} \tag{1.4}$$

квадрики **Q** имеет ранг два. Из (1.2) следует, что это условие для конгруэнции **T** равносильно неравенству

$$\lambda \neq 0. \tag{1.5}$$

2. Фокальное многообразие квадрики $\mathbf{Q} \in \mathbf{T}$ определяется системой уравнений [4,с.55,56]:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0,\ x^2x^3 = 0,\ x^1x^3 = 0. \tag{2.1}$$

Следовательно, оно состоит из пары прямолинейных образующих A_0A_1, A_0A_2 квадрики **Q** и точки A_3.

Теорема 2.1. Фокальные поверхности (A_0), (A_1), (A_2), конгруэнции **T** являются одной и той же квадрикой.

Доказательство. Рассмотрим квадрику

$$\Phi_\lambda \equiv 2x^1x^2 - 2x^0x^3 + \lambda\,(x^3)^2 = 0 \tag{2.2}$$

Используя формулы

$$d\,x^{\alpha} = -\,x^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha},\ d\lambda = -2\lambda\omega_0^0\ (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3), \tag{2.3}$$

находим: $d\Phi_{\lambda} \equiv 0$. Следовательно, квадрика (2.2) — инвариантная. Так как точки A_0, A_1, A_2 принадлежат этой квадрике, то фокальные поверхности (A_0), (A_1), (A_2) совпадают с ней.

Теорема 2.2. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) соответствуют. Фокусы луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2. Одна фокальная поверхность прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) вырождается в линию.

Доказательство. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) определяются одним и тем же уравнением:

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0 \tag{2.5}$$

Обозначим:

$$\bar{F}_1 = \bar{A}_1 + \bar{A}_2,\quad \bar{F}_2 = \bar{A}_1 - \bar{A}_2, \tag{2.6}$$

$$\bar{N}_1 = (2 + \lambda)\,\bar{A}_0 + \bar{A}_3,\quad \bar{N}_2 = \lambda\,\bar{A}_0 + \bar{A}_3. \tag{2.7}$$

Из (1.2) следует:

$$d\,\bar{F}_1 = (\omega^1 + \omega^2)\,{}^1\!/_2\,\alpha\,\bar{F}_2 + \bar{N}_1, \tag{2.8}$$

$$d\,\bar{F}_2 = (\omega^2 - \omega^1)\,\bar{N}_2 + {}^1\!/_2\,\alpha(\omega^1 + \omega^2)\,\bar{F}_1. \tag{2.9}$$

Из (2.8) следует, что точки F_1 и F_2 являются фокусами луча A_1A_2 и что поверхность (F_1) вырождается в линию.

Теорема 2.3. Фокальные поверхности прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) вырождаются в линии, касательные к которым пересекают луч A_1A_2 в его фокусах F_1 и F_2.

Доказательство. Из (1.2) следует, что точка A_3, описывающая линию, и точка

$$\bar{M} = 2\,\bar{A}_0 - \bar{A}_3 \tag{2.10}$$

являются фокусами луча A_0A_3. Так как

$$d\,\bar{A}_3 = (\omega^1 + \omega^2)\,(\bar{F}_1 - {}^1\!/_2\,\beta\,\bar{A}_3), \tag{2.11}$$

$$d\,\bar{M} = {}^1\!/_2\,\beta(\omega^1 + \omega^2)\,\bar{M} + (\omega^1 - \omega^2)\,\bar{F}_2, \tag{2.12}$$

то поверхность (M) является линией, причем касательная к линии (A_3) проходит через фокус F_1, а касательная к линии (M) — через фокус F_2.

Теорема 2.4. Плоскость, определяемая лучом A_1A_2 и касательной к линии (F_1), пересекает луч A_0A_3 в точке N_1, а касательная плоскость к фокальной поверхности (F_2) пересекает луч A_0A_3 в точке N_1.

Доказательство. Из (2.8) следует, что $N_1 \in [\,\bar{A}_1,\ \bar{A}_2,\ {}^1\!/_2\,\bar{F}_2 + \bar{N}_1\,]$, $N_2 \in [\,\bar{F}_1,\ \bar{F}_2,\ \bar{N}_2\,]$.

Имеем:
$$\lambda = \frac{2}{(A_3A_0;\,N_1N_2) - 1}, \tag{2.13}$$

причем знаменатель дроби отличен от нуля, так как при $(A_3A_0;\,N_1N_2) = \mathrm{const}$ система (1.2), (1.3) несовместна.

Библиографический список

1. *Щербаков Р.Н., Малаховский В.С.* Краткий курс аналитической геометрии. Томск, 1964. 382 с.

2. *Малаховская С.В.* Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1982. Вып. 13. С. 60 - 64.

3. *Шмелева С.В.* Об одном классе конгруэнций квадрик в $\mathbf{P_3}$ с четырехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С. 127 - 132.

4. *Малаховский В.С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986. 72 с.

S. V. S h m e l e v a

ON ONE CLASS OF CONGRUENCES OF RULED QUADRICS WITH A FOCAL TETRAHEDRON

A class T of congruences of nondegenerated ruled quadrics Q whose four focal points A_0, A_1, A_2, A_3 form self-polar tetrahedron of a third genus of a quadric Q in which A_0A_i, A_3A_i (i=1,2) are rectilinear generatrixes, where A_0 is a point of the second order and a focal surface (A_3) degenerated into a line is investigated in a three- dimensional projective space P_3. It is proved, that focal surfaces (A_0), (A_1), (A_2) are one and the same quadric and focal surfaces of a rectilinear congruence (A_0A_3) are degenerated into lines, whose tangents passes through focuses F_1 and F_2 of a ray A_1A_2 of a rectilinear congruence (A_1A_2) one of which describes a line as well.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОНГРУЭНЦИЙ ОСНАЩЕННЫХ КОНИК В A_3

Е.А. Щ е р б а к

(*Калининградский государственный университет*)

Продолжаются исследования [1] конгруэнций **К** оснащенных коник $\mathbf{F = \{F_1, F_2\}}$, где $\mathbf{F_1}$— центральная коника, а $\mathbf{F_2}$ — точка, неинцидентная плоскости коники $\mathbf{F_1}$. Получены новые геометрические свойства конгруэнций **К**, в том числе необходимое и достаточное условие того, что точка **A** — фокус луча $[\mathbf{A}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha]$ конгруэнции $(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{e}}_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.