Предложение 5. Единственной гиперквадрикой в связке (12), касательная к которой в точке P параллельна гиперплоскости Чеха Π_c, является гиперквадрика Чеха Q_c.

Замечание 2. Проведенные рассуждения показывают, что при заданном множестве χ характеристических прямых в точке P множество $I\setminus\{P\}$ главных точек можно в нашем случае получить тремя способами: 1) с помощью $K(P_I)$ – главных прямых; 2) при помощи струи $j^2_P f$; 3) с помощью гиперквадрики Чеха Q_c.

Список литературы

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1979.

2. *Андреев Б.А.* К геометрии дифференцируемого отображения $f:P_m \to P_n$ $(m \geq n)$ // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1987. №18. С. 5 – 9.

3. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия. 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65 – 107.

4. *Чех Э.* Проективная дифференциальная геометрия соответствий между пространствами // Чехосл. мат. журн. 1952. №1. С. 91 – 107.

5. *Vrânceanu G.* Sul tensore associanto ad una corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. Vol.12. №4. P. 489 – 506.

B. Andreev

THE CECH`S HYPERQUADRIC OF THE POINT CORRESPONDENCE

The local point mapping of progective-affine spaces is studied. Geometrical images based on the notion of the Cech`s local collineation are found and interpreted geometrically. Propositions are proved about properties of this images and their connection with the notion of the principal points, defined by the author.

УДК 514.763.8

М.Б. Банару

(Смоленский гуманитарный университет)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Найден простой критерий принадлежности произвольного почти эрмитова многообразия классу AH-многообразий с *J*-инвариантным тензором Риччи. Указано семейство нетривиальных примеров 6-мерных почти эрмитовых многообразий с *J*-инвариантным тензором Риччи.

Почти эрмитовы (almost Hermitian, *AH*-) структуры относятся к числу наиболее содержательных дифференциально-геометрических структур. Их изучению посвящено огромное количество публикаций, характеризующих эти структуры как с точки зрения дифференциальной геометрии, так и с точки зрения математической физики. Значительный вклад в теорию почти эрмитовых структур внесли такие выдающиеся геометры, как Браун, Вайсман, Ванхекке, Грей, Калаби, К.-Т. Ким, Кириченко, Кода, Опрою, Прванович, Рицца, Секигава, Танно, Татибана, Чо, Яно.

В данной статье о почти эрмитовых многообразиях с J-инвариантным тензором Риччи приводится несколько новых результатов, полученных автором в данном направлении. Отметим, что эти результаты анонсированы в материалах 4-й международной конференции по геометрии и топологии в Черкассах [1].

Напомним [2], что почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J – почти комплексная структура, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ – риманова метрика. При этом J и $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle=\langle X, Y\rangle, \quad \forall X,Y\in\aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ – модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразия с фиксированной на них почти эрмитовой структурой называются почти эрмитовыми (AH-) многообразиями. С каждой AH-структурой $\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т. е. 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,Y)=\langle X, JY\rangle, \quad \forall X,Y\in\aleph(M^{2n})$$

и называемого фундаментальной (или келеровой) формой структуры.

Пусть $(M^{2n}, J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p\in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ – касательное пространство к многообразию в точке p, $\{J_p, g_p=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ – почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом:

$$(p, \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}},\ldots,\varepsilon_{\hat{n}}),$$

где $p\in M^{2n}$, ε_a – собственные векторы оператора структуры, отвечающие собственному значению оператора $i=\sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ – собственные векторы оператора структуры, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь и далее индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a}=a+n$. Поэтому матрица оператора структуры в A-репере в точке p имеет вид:

$$\left(J_j^k\right)=\left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right),$$

где I_n – единичная матрица порядка n; $k, j = 1,\ldots, 2n$. Непосредственная проверка показывает, что матрицы римановой метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ и фундаментальной формы F в A-репере примут соответственно вид:

$$\left(g_{kj}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right); \quad \left(F_{kj}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right).$$

Определение. Почти эрмитово многообразие называется *AH*-многообразием с *J*-инвариантным тензором Риччи, если

$$J \circ ric \equiv ric \circ J\ . \tag{1}$$

Теорема 1. *Почти эрмитово многообразие имеет инвариантный тензор Риччи тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры справедливо равенство:*

$$ric_{ab} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Компоненты тензора Риччи, как хорошо известно [4; 5], связаны с компонентами тензора римановой кривизны (тензора Римана-Кристоффеля) соотношением $ric_{kj} = R^m{}_{kjm}$.

1. Пусть *AH*-многообразие имеет *J*-инвариантный тензор Риччи, т.е. имеет место (1). Тогда на пространстве присоединенной *G*-структуры

$$(J\ ric)^k_j = (ric\ J)^k_j \text{, т.е. } J^k_m ric^m_j = ric^k_m J^m_j\ .$$

Рассмотрим четыре возможных случая:

1) $k = a,\ j = b$;

$$J^a_m ric^m_b = ric^a_m J^m_b \Leftrightarrow J^a_c ric^c_b + J^a_{\hat{c}} ric^{\hat{c}}_b = ric^a_c J^c_b + ric^a_{\hat{c}} J^{\hat{c}}_b \Leftrightarrow i\delta^a_c ric^c_b = ric^a_c i\delta^c_b \Leftrightarrow ric^a_b = ric^a_b;$$

2) $k = \hat{a},\ j = \hat{b}$;

$$J^{\hat{a}}_m ric^m_{\hat{b}} = ric^{\hat{a}}_m J^m_{\hat{b}} \Leftrightarrow J^{\hat{a}}_c ric^c_{\hat{b}} + J^{\hat{a}}_{\hat{c}} ric^{\hat{c}}_{\hat{b}} = ric^{\hat{a}}_c J^c_{\hat{b}} + ric^{\hat{a}}_{\hat{c}} J^{\hat{c}}_{\hat{b}} \Leftrightarrow -i\delta^c_a ric^{\hat{c}}_{\hat{b}} = ric^{\hat{a}}_{\hat{c}}(-i\delta^b_c) \Leftrightarrow ric^{\hat{a}}_{\hat{b}} = ric^{\hat{a}}_{\hat{b}};$$

3) $k = \hat{a},\ j = b$;

$$J^{\hat{a}}_m ric^m_b = ric^{\hat{a}}_m J^m_b \Leftrightarrow J^{\hat{a}}_c ric^c_b + J^{\hat{a}}_{\hat{c}} ric^{\hat{c}}_b = ric^{\hat{a}}_c J^c_b + ric^{\hat{a}}_{\hat{c}} J^{\hat{c}}_b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -i\delta^c_a ric^{\hat{c}}_b = ric^{\hat{a}}_c i\delta^c_b \Leftrightarrow -i\,ric^{\hat{a}}_b = i\,ric^{\hat{a}}_b \Leftrightarrow ric^{\hat{a}}_b = 0 \Leftrightarrow ric_{ab} = 0;$$

4) $k = a,\ j = \hat{b}$;

$$J^a_m ric^m_{\hat{b}} = ric^a_m J^m_{\hat{b}} \Leftrightarrow J^a_c ric^c_{\hat{b}} + J^a_{\hat{c}} ric^{\hat{c}}_{\hat{b}} = ric^a_c J^c_{\hat{b}} + ric^a_{\hat{c}} J^{\hat{c}}_{\hat{b}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i\delta^a_c ric^{\hat{c}}_{\hat{b}} = ric^a_{\hat{c}}(-i\delta^b_c) \Leftrightarrow i\,ric^a_{\hat{b}} = -i\,ric^a_{\hat{b}} \Leftrightarrow ric^a_{\hat{b}} = 0 \Leftrightarrow ric_{\hat{a}\hat{b}} = 0.$$

Итак, $ric_{ab} = 0$.

2. Обратно, пусть имеет место (2). Тогда $ric_{\hat{a}\hat{b}} = \overline{ric_{ab}} = 0$.

Проведем такие рассуждения:

1) $(J\ ric)^a_{\hat{b}} = J^a_c ric^c_{\hat{b}} = J^a_c ric_{\hat{c}\hat{b}} = 0$,

$(ric\ J)^a_{\hat{b}} = ric^a_{\hat{c}} J^{\hat{c}}_{\hat{b}} = ric_{\hat{a}\hat{c}} J^{\hat{c}}_{\hat{b}} = 0$, а, значит, $(J\ ric)^a_{\hat{b}} = (ric\ J)^a_{\hat{b}}$;

2) $(J\ ric)^{\hat{a}}_b = J^{\hat{a}}_{\hat{c}} ric^{\hat{c}}_b = J^{\hat{a}}_{\hat{c}} ric_{cb} = 0$,

$(ric\ J)^{\hat{a}}_b = ric^{\hat{a}}_c J^c_b = ric_{ac} J^c_b = 0$, а, значит, $(J\ ric)^{\hat{a}}_b = (ric\ J)^{\hat{a}}_b$;

3) $(J\ ric)^a_b = J^a_c ric^c_b = i\,ric^a_b$,

$(ric\ J)^a_b = ric^a_c J^c_b = i\,ric^a_b$, а, значит, $(J\ ric)^a_b = (ric\ J)^a_b$;

4) $(J\ ric)^{\hat{a}}_{\hat{b}} = J^{\hat{a}}_{\hat{c}} ric^{\hat{c}}_{\hat{b}} = -i\,ric^{\hat{a}}_{\hat{b}}$,

$(ric\ J)^{\hat{a}}_{\hat{b}} = ric^{\hat{a}}_{\hat{c}} J^{\hat{c}}_{\hat{b}} = -i\,ric^{\hat{a}}_{\hat{b}}$, а, значит, $(J\ ric)^{\hat{a}}_{\hat{b}} = (ric\ J)^{\hat{a}}_{\hat{b}}$. Следовательно, $(\,J\ ric\,)^k_j = (\,ric\ J\,)^k_j \Leftrightarrow$, что означает выполнение (1). Таким образом, (1) $\Leftrightarrow$ (2), что и требовалось доказать. Отметим, что доказанная теорема обобщает результат Арсеньевой и Кириченко [3], полученный для четырехмерных эрмитовых многообразий.

Разумеется, интерес представляют лишь такие почти эрмитовы многообразия с J-инвариантным тензором Риччи, для которых $ric \not\equiv 0$. Целое семейство подобных примеров содержат в себе 6-мерные почти эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. В самом деле, пусть $\mathbf{O} \equiv R^8$ – алгебра Кэли. Как известно [6], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y;$$
$$P_2(X, Y, Z) = -(X\bar{Y})Z + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \bar{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [6]. Напомним [7], что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 – единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [7]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

Как известно [3], интегрируемая почти эрмитова структура называется эрмитовой, а многообразие, снабженное такой структурой, эрмитовым многообразием.

Теорема 2. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является АН-многообразием с J-инвариантным тензором Риччи.*

Доказательство. Воспользуемся значениями спектра тензора Риччи 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав [7]:

$$ric_{ab} = 0; ric_{\hat{a}b} = -\sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{h}} T^{\varphi}_{hb}.$$

Здесь T^{φ}_{ps} – компоненты тензора эйлеровой кривизны [9], или, в более употребительной терминологии А. Грея [10], конфигурационного тензора. При этом $\varphi = 7, 8$; $a, b, h = 1, 2, 3$; $p, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\hat{a} = a + 3$. В силу теоремы 1 $ric_{ab} = 0$ означает J-инвариантность тензора Риччи. Теорема 2 доказана.

Изрядное количество конкретных примеров 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли общего типа (и, как теперь мы знаем, многообразий с J-инвариантным тензором Риччи) содержится в классических работах Грея [10; 11] и Кириченко [12; 13].

Список литературы

1. *Банару М.Б.* Об *АН*-многообразиях с J-инвариантным тензором Риччи // Тезисы докл. 4-й межд. конф. по геометрии и топологии. Черкассы, 2001. С. 9.

2. *Кириченко В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии. М.,1986. Т. 18. С. 25 – 72.

3. *Арсеньева О.Е., Кириченко В.Ф.* Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Матем. сб.1998. Т. 189. №1. С. 21 – 44.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

5. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., 1980.

6. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc.1969. V. 141. P. 465 – 504.

7. *Кириченко В.Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. 1973. № 3. С. 70 – 75.

8. *Банару М.Б.* О спектрах важнейших тензоров 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Новейшие проблемы теории поля. Казань, 2000. С. 18 – 22.

9. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960.

10. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois Journal Math. 1966.V.10. №2. P. 353 – 366.

11. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. Journal. 1969. V. 21. P. 614 – 620.

12. *Кириченко В.Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Укр. геом. сборник. Харьков, 1982. Т. 25. С. 60 – 68.

13. *Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. 1994. № 3. С. 6 – 13.

M. Banaru

ON A CLASS OF ALMOST HERMITIAN MANIFOLDS

A criterion for an arbitrary almost Hermitian manifold to possess a *J*-invariant Ricci tensor is established. Some new examples of six-dimensional almost Hermitian manifolds with a *J*-invariant Ricci tensor are given.

УДК 514.763.8

М.Б. Банару, Г.А. Банару

(Смоленский гуманитарный университет,
Смоленский государственный педагогический университет)

АКСИОМА *U*-КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ И 6-МЕРНЫЕ ЭРМИТОВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБРЫ ОКТАВ

Доказано, что всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме *U*-косимплектических гиперповерхностей, является келеровым многообразием.

Работа [1] посвящена 6-мерным эрмитовым (общего типа) подмногообразиям алгебры Кэли. Основным ее результатом является теорема о том, что если 6-мер-