Т е о р е м а. Поверхность (A) расслояемой пары T является фокальной поверхностью конгруэнции (F_1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.6), убеждаемся, что координаты точки A обращают в тождество уравнение (2.15) при $\omega^1 = 0$. Следовательно, A -фокальная поверхность конгруэнции парабол, а $\omega^1 = 0$ - её фокальное семейство.

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., Труды геометрического семинара ВИНИТИ, М., 1971, 3, 193-220.

2. Л.И. Магазинников, Центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций. "Геометрический сборник", вып. 5 (Труды Томского ун-та), т. 181, 1965, 43-56.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

Х Л Я П О В А Е.А.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР В A_n.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается многообразие пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 -центральный квадратичный элемент, а F_2 - k-плоскость, не инцидентная гиперплоскости квадратичного элемента.

Такая пара фигур называется центральной квадратичной парой [3]. Найден основной фундаментальный объект данного многообразия. Рассмотрены некоторые частные классы многообразия $\{2,1,3\}$.

§ 1. Система дифференциальных уравнений многообразия $\{h,k,n\}$.

О п р е д е л е н и е. Многообразием $\{h,k,n\}$ называется многообразие центральных квадратичных пар [3] n-мерного аффинного пространства, у которых k-плоскости F_2 образуют h-параметрическое семейство, а многообразие центральных квадратичных элементов, входящих в пару, является многообразием $(h,h,n)^2$ [1]

1 Рассмотрим общий случай, когда $k > 1$. Исследование многообразий $\{h,k,n\}$ осуществляется в частично-канонизированном репере. Вершина A репера совмещается с центром квадратичного элемента,

векторы $\bar{e}_i$ располагаются в его гиперплоскости, причем векторы $\bar{e}_{\hat{a}}$ параллельны линии пересечения κ-плоскости F_2 с гиперплоскостью квадратичного элемента, а вектор $\bar{e}_n$ располагается вне гиперплоскости квадратичного элемента, параллельно F_2.

Индексы, встречающиеся в работе, принимают следующие значения:

$$\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K} = 1,2,\dots,h\ ;\quad a,b,c = h+1,\dots,n\ ;\quad \alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,n\ ;$$

$$\hat{i},\hat{j} = 1,\dots,n-\kappa\ ;\quad \hat{a},\hat{b} = n-\kappa+1,\dots,n\ ;\quad i,j,\kappa = 1,\dots,n-1\ ;$$

$$\hat{i}',\hat{j}' = 1,\dots,n-\kappa-1\ ;\quad \hat{a}',\hat{b}' = n-\kappa+1,\dots n-1\ ;\quad \hat{\alpha},\hat{\beta} = h+1,\dots,n-\kappa\ ;$$

$$\tilde{\alpha},\tilde{\beta} = n-\kappa+1,\dots,h\ ;\quad a',b' = h+1,\dots,n-1\ ;\quad a'',b'' = h+1,\dots,n-2\ ;$$

$$i',j' = 1,\dots,n-2.$$

Инфинитезимальное перемещение репера определяется формулами:

$$d\bar{A} = \omega^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}\ ,\quad d\bar{e}_{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta}\bar{e}_{\beta}\ , \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^{α}, ω_{α}^{β} удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha} = \omega^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\alpha}\ ;\quad \mathcal{D}\omega_{\alpha}^{\beta} = \omega_{\alpha}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\beta}\ . \tag{1.2}$$

Уравнения центрального квадратичного элемента F_1 и κ-плоскости F_2 принимают соответственно вид:

$$a_{ij}x^i x^j - 1 = 0\ ,\quad x^n = 0\ ,\quad \det(a_{ij}) \neq 0\ , \tag{1.3}$$

$$x^{\hat{i}} = c^{\hat{i}} \tag{1.4}$$

Система дифференциальных уравнений многообразия $\{h,\kappa,n\}$ имеет вид

$$\omega^{a} = \Lambda_{\mathcal{J}}^{a}\,\omega^{\mathcal{J}}\ ;\quad \omega_i^n = \Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n}\,\omega^{\mathcal{J}}\ ;\quad \omega_{\hat{a}}^{\hat{i}} = \Lambda_{\hat{a},\mathcal{J}}^{\hat{i}}\,\omega^{\mathcal{J}}\ ;$$

$$\theta^{\hat{i}} = \Lambda_{\mathcal{J}}^{\hat{i}}\,\omega^{\mathcal{J}}\ ;\quad \theta_{ij} = \Lambda_{ij\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}, \tag{1.5}$$

где

$$\theta_{ij} = da_{ij} - a_{\kappa j}\,\omega_i^{\kappa} - a_{i\kappa}\,\omega_j^{\kappa}\ ,$$

$$\theta^{\hat{i}} = dc^{\hat{i}} + c^{\hat{j}}\,\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}. \tag{1.6}$$

Замыкая систему (I.5), получим:

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}}^{a}\wedge\omega^{\mathcal{J}} = 0\ ;\quad \Delta\Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n}\wedge\omega^{\mathcal{J}} = 0;\quad \Delta\Lambda_{\hat{a},\mathcal{J}}^{\hat{i}}\wedge\omega^{\mathcal{J}} = 0\ ;$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}}^{\hat{i}}\wedge\omega^{\mathcal{J}} = 0\ ;\quad \Delta\Lambda_{ij,\mathcal{J}}\wedge\omega^{\mathcal{J}} = 0, \tag{1.7}$$

где

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}}^{a} = \nabla\Lambda_{\mathcal{J}}^{a} - \Lambda_{\mathcal{J}}^{a}\Lambda_{\mathcal{J}}^{b}\,\omega_{b}^{\mathcal{J}} - \omega_{\mathcal{J}}^{a}\ ,$$

$$\Delta\Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n} = \nabla\Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n} - \Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n}\Lambda_{\mathcal{J}}^{b}\,\omega_{b}^{\mathcal{J}}\ ,$$

$$\Delta\Lambda_{\hat{a}\mathcal{J}}^{\hat{i}} = \nabla\Lambda_{\hat{a}\mathcal{J}}^{\hat{i}} - \Lambda_{\hat{a}\mathcal{J}}^{\hat{i}}\Lambda_{\mathcal{J}}^{b}\,\omega_{b}^{\mathcal{J}}\ ,$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}}^{\hat{i}} = \nabla\Lambda_{\mathcal{J}}^{\hat{i}} - \Lambda_{\mathcal{J}}^{\hat{i}}\Lambda_{\mathcal{J}}^{b}\,\omega_{b}^{\mathcal{J}} - c^{\hat{j}}\Lambda_{\hat{a}\mathcal{J}}^{\hat{i}}\,\omega_{\hat{j}}^{\hat{a}}\ ,$$

$$\Delta\Lambda_{ij,\mathcal{J}} = \nabla\Lambda_{ij,\mathcal{J}} - \Lambda_{ij,\mathcal{J}}\Lambda_{\mathcal{J}}^{b}\,\omega_{b}^{\mathcal{J}} - (a_{\hat{a}'j}\Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n} + a_{i\hat{a}'}\Lambda_{j,\mathcal{J}}^{n})\,\omega_n^{\hat{a}'}\ .$$

Так как гиперплоскости квадратичного элемента F_1 и κ-плоскости F_2 образуют h-параметрические семейства, то ранги матриц

$$C = (\Lambda_{i,\mathcal{J}}^{n})\ ,\quad \mathcal{D} = (\Lambda_{\hat{a},\mathcal{J}}^{\hat{i}}) \tag{1.9}$$

равны h.

Здесь индекс $\mathcal{J}$ определяет строку, а пара индексов $(\hat{a},\hat{t})$ – столбец матрицы $\mathcal{D}$.

Т е о р е м а. Фундаментальный объект первого порядка является основным объектом многообразия $\{h,k,n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения основного объекта [2] следует, что нужно доказать алгебраическую разрешимость системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{\theta}_{ij}=0;\quad \overset{\circ}{\theta}{}^{\hat{t}}=0;\quad \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{a}_{\mathcal{J}}=0; \\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{a},\mathcal{J}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda^{\hat{t}}_{\mathcal{J}}=0,\ \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{ij,\mathcal{J}}=0 \end{array}\right\} \qquad (1.10)$$

локального фундаментального объекта

$$\Gamma_1=\{a_{ij};\,c^{\hat{t}};\,\Lambda^{a}_{\mathcal{J}};\,\Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}};\,\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{a},\mathcal{J}};\,\Lambda^{\hat{t}}_{\mathcal{J}};\,\Lambda_{ij,\mathcal{J}}\}$$

первого порядка относительно всех вторичных форм.

Здесь нолик над формой Пфаффа означает фиксацию первичных параметров. Так как система дифференциальных уравнений (I.10) вполне интегрируема, то начальные значения компонент фундаментального объекта Γ_1 можно задавать произвольно, учитывая (I.9).

Выделим три возможных случая:

$$1).\ h=n-k;\quad 2).\ h<n-k;\quad 3).\ h>n-k.$$

Для всех этих случаев начальные значения компонент $a_{ij};\Lambda_{\hat{a}'\hat{a}',1};\Lambda^{n}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ зададим одинаково:

$$\bar{a}_{ij}=\delta^{j}_{i};\quad \bar{\Lambda}_{\hat{a}'\hat{a}',1}=\hat{a}';\quad \bar{\Lambda}^{n}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}=\delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}.$$

Значения же остальных компонент для каждого из этих случаев будем задавать следующим образом:

1) $\bar{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{n\mathcal{J}}=\mathcal{J}$, остальные начальные значения компонент положим равными нулю.

2) $\bar{\Lambda}^{\mathcal{J}}_{n\mathcal{J}}=\mathcal{J}$, $\bar{\Lambda}^{n}_{\hat{a}',1}=1$, $\bar{\Lambda}_{22,1}=2$, остальные компоненты равны нулю.

3) $\bar{\Lambda}^{n}_{\hat{a}',1}=1$, $\bar{\Lambda}^{1}_{22}=1$, $\bar{\Lambda}^{\hat{t}}_{n\hat{t}}=\hat{t}$, остальные компоненты равны нулю.

К системе (I.10) присоединим формальную алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} Y_{ij}&=a_{kj}\pi^{k}_{i}+a_{ik}\pi^{k}_{j},\\ Y^{\hat{t}}&=-c^{\hat{\jmath}}\pi^{\hat{t}}_{\hat{\jmath}},\\ Y^{a}_{\mathcal{J}}&=-\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{a}_{b}+\Lambda^{a}_{\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{a}_{\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b}+\pi^{a}_{\mathcal{J}},\\ Y^{n}_{i,\mathcal{J}}&=\Lambda^{n}_{j,\mathcal{J}}\pi^{j}_{i}+\Lambda^{n}_{i,\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b},\\ Y^{\hat{t}}_{\hat{a},\mathcal{J}}&=-\Lambda^{\hat{\jmath}}_{\hat{a},\mathcal{J}}\pi^{\hat{t}}_{\hat{\jmath}}+\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{b},\mathcal{J}}\pi^{\hat{b}}_{\hat{a}}+\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{a},\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{a},\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b},\\ Y^{\hat{t}}_{\mathcal{J}}&=-\Lambda^{\hat{\jmath}}_{\mathcal{J}}\pi^{\hat{t}}_{\hat{\jmath}}+\Lambda^{\hat{t}}_{\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\Lambda^{\hat{t}}_{\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b}+c^{\hat{\jmath}}\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{a},\mathcal{J}}\pi^{\hat{a}}_{\hat{\jmath}},\\ Y_{ij,\mathcal{J}}&=\Lambda_{kj,\mathcal{J}}\pi^{k}_{i}+\Lambda_{ik,\mathcal{J}}\pi^{k}_{j}+\Lambda_{ij,\varkappa}\pi^{\varkappa}_{\mathcal{J}}+\\ &\quad+\Lambda_{ij,\mathcal{J}}\Lambda^{b}_{\mathcal{J}}\pi^{\mathcal{J}}_{b}+(a_{\hat{a}'j}\Lambda^{n}_{i,\mathcal{J}}+a_{i\hat{a}'}\Lambda^{n}_{j,\mathcal{J}})\pi^{\hat{a}'}_{n}. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Из (I.II) находим:

$$\begin{aligned} &1).\ \pi^{a'}_{\mathcal{J}}=-Y^{a'}_{\mathcal{J}};\quad \pi^{n}_{n}=Y^{1}_{n,1};\quad (\mathcal{J}-\mathcal{J})\pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}=Y^{\mathcal{J}}_{n\mathcal{J}},\\ &\pi^{a'}_{n}=\tfrac{1}{2}Y_{\hat{a}'\hat{a}',1}-\tfrac{1}{2}\hat{a}'Y_{11}-\tfrac{1}{2}\hat{a}'Y_{\hat{a}'\hat{a}'},\\ &(\hat{b}'-\hat{a}')\pi^{\hat{b}'}_{\hat{a}'}=Y_{\hat{a}'\hat{b}',1}-\hat{a}'Y_{\hat{a}'\hat{b}'}-\pi^{\hat{b}'}_{n}-\pi^{\hat{a}'}_{n}; \end{aligned} \qquad (1.12)$$

$$2).\ (\hat{\beta}-\hat{\alpha})\pi^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}=Y_{\hat{\alpha}\hat{\beta},1}-\hat{\alpha}Y_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$$

и все уравнения системы (I.I2)

$$3).\ (\hat{t}-\hat{\jmath})\pi^{\hat{\jmath}}_{\hat{t}}=Y^{\hat{t}}_{n,\hat{\jmath}},\quad \pi^{\hat{\alpha}}_{\hat{t}}=Y_{\hat{t}\hat{\alpha}}.$$

и все уравнения системы (I.I2), кроме третьего.

Здесь по индексам $\mathcal{J},\mathcal{J},\hat{a}',\hat{b}',\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{t},\hat{\jmath}$ суммирование не производится.

Если формальная система (I.II) алгебраически разрешима относительно всех вторичных форм [2], то система дифференциальных уравнений (I.7), (I.8) разрешима относительно вторичных форм в окрестности точки

$$(\overset{\circ}{a}_{ij};\ \overset{\circ}{c}{}^{\hat{t}};\ \overset{\circ}{\Lambda}{}^{a}_{\mathcal{J}};\ \overset{\circ}{\Lambda}{}^{n}_{i,\mathcal{J}};\ \overset{\circ}{\Lambda}{}^{\hat{t}}_{\hat{a},\mathcal{J}};\ \overset{\circ}{\Lambda}{}^{\hat{t}}_{\mathcal{J}};\ \overset{\circ}{\Lambda}_{ij,\mathcal{J}}).$$

Так как в каждом из трех случаев все вторичные формы найдены, то теорема доказана.

§ 2. Многообразия $\{h,1,n\}$.

Для многообразия $\{h,1,n\}$ репер строим следующим образом: вершину A репера помещаем в центр квадратичного элемента

F_1 ,векторы $\bar{e}_i$ располагаем в его гиперплоскости так,что конец вектора $\bar{e}_{n-1}$ совмещается с точкой пересечения прямой F_2 с гиперплоскостью квадратичного элемента,а вектор $\bar{e}_n$ параллелен прямой F_2 .

Система дифференциальных уравнений многообразия $\{h, 1, n\}$ имеет вид:

$$\omega^a = \Lambda^a_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}\,;\quad \omega^{\hat{i}}_n = \Lambda^{\hat{i}}_{n,\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}\,;\quad \omega^n_{\hat{i}} = \Lambda^n_{\hat{i},\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}\,;$$
$$\omega^{\hat{i}}_{n-1} = \Lambda^{\hat{i}}_{n-1,\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}\,;\quad \Theta_{ij} = \Lambda_{ij,\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}, \tag{2.1}$$

где Θ_{ij} определяется формулами (I.6).Замыкая систему (2.I), получаем

$$\Delta\Lambda^a_{\mathcal{J}} \wedge \omega^{\mathcal{J}} = 0\,;\quad \Delta\Lambda^{\hat{i}}_{n,\mathcal{J}} \wedge \omega^{\mathcal{J}} = 0\,;\quad \Delta\Lambda^n_{\hat{i},\mathcal{J}} \wedge \omega^{\mathcal{J}} = 0\,;$$
$$\Delta\Lambda^{\hat{i}}_{n-1,\mathcal{J}} \wedge \omega^{\mathcal{J}} = 0\,;\quad \Delta\Lambda_{ij,\mathcal{J}} \wedge \omega^{\mathcal{J}} = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta\Lambda^a_{\mathcal{J}} = d\Lambda^a_{\mathcal{J}} - \Lambda^a_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} + \Lambda^{b''}_{\mathcal{J}}\,\omega^a_{b''} - \Lambda^a_{\mathcal{J}}\Lambda^{a''}_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{a''} + \Lambda^n_{\mathcal{J}}\,\omega^a_n - \omega^a_{\mathcal{J}},$$

$$\Delta\Lambda^{\hat{i}}_{n,\mathcal{J}} = d\Lambda^{\hat{i}}_{n,\mathcal{J}} - \Lambda^{\hat{i}}_{n,\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} + \Lambda^{\hat{j}'}_{n,\mathcal{J}}\,\omega^{\hat{i}}_{\hat{j}'} - \Lambda^{\hat{i}}_{n\mathcal{J}}\Lambda^{b''}_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{b''},$$

$$\Delta\Lambda^n_{\hat{i},\mathcal{J}} = d\Lambda^n_{\hat{i},\mathcal{J}} - \Lambda^n_{\hat{i},\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} - \Lambda^n_{\hat{j},\mathcal{J}}\,\omega^{\hat{j}}_{\hat{i}} - \Lambda^n_{\hat{i}\mathcal{J}}\Lambda^{b''}_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{b''},$$

$$\Delta\Lambda^{\hat{i}}_{n-1,\mathcal{J}} = d\Lambda^{\hat{i}}_{n-1,\mathcal{J}} - \Lambda^{\hat{i}}_{n-1,\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} + \Lambda^{\hat{i}'}_{n-1,\mathcal{J}}\,\omega^{\hat{i}}_{\hat{i}'} + \Lambda^{\hat{i}}_{n-1,\mathcal{J}}\Lambda^{b''}_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{b''},$$

$$\Delta\Lambda_{ij,\mathcal{J}} = \nabla\Lambda_{ij,\mathcal{J}} - \Lambda_{ij,\mathcal{J}}\Lambda^{b''}_{\mathcal{J}}\,\omega^{\mathcal{J}}_{b''}\,.$$

Т е о р е м а . Фундаментальный объект

первого порядка является основным объектом многообразия $\{h, 1, n\}$

Д о к а з а т е л ь с т в о .Начальные значения компонент фундаментального объекта Γ_1 зададим следующим образом:

$$\tilde{a}_{ij} = \delta^j_i\,;\quad \tilde{\Lambda}^n_{\mathcal{J}\mathcal{J}} = \delta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}}\,,\quad \tilde{\Lambda}_{\mathcal{J}\varkappa,\mathcal{J}} = \delta^{\varkappa}_{\mathcal{J}}\,;\quad \tilde{\Lambda}_{a''a'',1} = a''.$$

Тогда

$$\hat{\pi}^a_{\mathcal{J}} = -y^a_{\mathcal{J}}\,;\quad \hat{\pi}^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}\,y_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\,;\quad \hat{\pi}^{a''}_{a''} = \frac{1}{2}\,y_{a''a''}\,;$$

$$\pi^n_n = \frac{1}{2}\,y_{nn}\,;\quad \hat{\pi}^{\mathcal{J}}_{a''} = y_{\mathcal{J}a''} + y^{a''}_{\mathcal{J}}\,,\quad \hat{\pi}^{\mathcal{J}}_{\varkappa} = y_{\mathcal{J}\varkappa,1}\,;$$

$$(b'' - a'')\,\hat{\pi}^{b''}_{a''} = y_{a''b'',1} - a''\,y_{c''b''}\,.$$

По индексам a'', b'', $\mathcal{J}$ суммирование не производится.

§3.Пары $\mathcal{L}$.

Многообразие $\{2, 1, 3\}$,заданное в эквиаффинном пространстве,назовем парой $\mathcal{L}$.Продолжим канонизацию репера,построенного в §2, таким образом,что вектор $\bar{e}_1$ будет сопряжен вектору $\bar{e}_2$,конец $\bar{e}_1$ принадлежит центральной конике F_1 .

Уравнения коники F_1 ,входящей в пару,записываются в виде:

$$(x^1)^2 + a\,(x^2)^2 = 1\,,\quad x^3 = 0\,. \tag{3.1}$$

Так как пространство эквиаффинное,то

$$\omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 = 0\,. \tag{3.2}$$

Система дифференциальных уравнений,определяющих пару $\mathcal{L}$,имеет вид:

$$\omega^3=\Gamma^3_\gamma\,\omega^\gamma;\quad \omega^\alpha_\gamma=\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\,\omega^\delta;\quad \omega^\gamma_3=\Gamma^\gamma_{3\delta}\,\omega^\delta;\quad da=\Gamma_\delta\,\omega^\delta \qquad (3.3)$$

Замыкая систему (3.3), получаем

$$\Delta\Gamma^3_\gamma\wedge\omega^\gamma=0;\ \Delta\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}\wedge\omega^\delta=0;\ \Delta\Gamma^\gamma_{3\delta}\wedge\omega^\delta=0;\ \Delta\Gamma_\delta\wedge\omega^\delta=0, \qquad (3.4)$$

где

$$\Delta\Gamma^3_\gamma=d\Gamma^3_\gamma+(\Gamma^3_\varkappa B^\varkappa_{\chi\gamma}-\Gamma^3_\chi)\,\omega^\chi+\Gamma^3_\gamma\,\omega^3_3,$$

$$\Delta\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}=d\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}+\Gamma^\alpha_{\gamma\varkappa}B^\varkappa_{\chi\delta}\omega^\chi+\Gamma^\beta_{\gamma\delta}\,\omega^\alpha_\beta,$$

$$\Delta\Gamma^\gamma_{3\delta}=d\Gamma^\gamma_{3\delta}+\Gamma^\gamma_{3\varkappa}B^\varkappa_{\chi\delta}\omega^\chi-\Gamma^\gamma_{\alpha\delta}\,\omega^\alpha_3, \qquad (3.5)$$

$$\Delta\Gamma_\delta=d\Gamma_\delta+\Gamma_\varkappa B^\varkappa_{\chi\delta}\omega^\chi,\qquad B^\varkappa_{\chi\delta}=\Gamma^\varkappa_{\chi\delta}+\Gamma^3_\chi\,\Gamma^\varkappa_{3\delta}.$$

Замкнутая система (3.3), (3.4) – в инволюции и определяет пары $\mathcal{L}$ с произволом 10 функций двух аргументов.

Обозначим через ℓ' прямую, проходящую через точку A параллельно вектору $\bar{e}_1$, а через α – плоскость $\{\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$.

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{L}$ называется парой $\mathcal{L}_0$, если
1) существует аффинное расслоение от конгруэнции коник (F_1) к семейству плоскостей (α) [4],
2) прямолинейные конгруэнции (ℓ) и (ℓ') образуют односторонне расслояемую пару от (ℓ) к (ℓ') [5],
3) точка A является характеристической точкой грани $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$
4) $\Gamma^1_{12}=0$.

Т е о р е м а. Пары $\mathcal{L}_0$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия, характеризующие пару $\mathcal{L}_0$

имеют вид:

$$\Gamma^3_1=\Gamma^3_2=\Gamma^1_{31}=\Gamma^1_{22}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{32}=\Gamma^2_{31}=\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=0.$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21} \qquad (3.6)$$

Анализируя исходную систему (3.3) и полученные соотношения (3.6), убеждаемся в справедливости теоремы.

Условия для нахождения фокальных точек коники F_1, входящей в пару $\mathcal{L}_0$, имеют вид

$$(x^1)^2+a\,(x^2)^2=1,\quad x^3=0;$$

$$b\,(x^1)^2x^2+c\,x^1(x^2)^2+d\,(x^2)^3+\ell\,x^1x^2=0, \qquad (3.7)$$

где

$$b=2\,(\Gamma^1_{11}\Gamma^3_{22}-a\,\Gamma^3_{11}\Gamma^2_{12});\quad c=2a\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{11}+\Gamma^3_{11}(\Gamma_2-2a\Gamma^2_{22});$$

$$d=\Gamma^3_{22}\,(2a\Gamma^2_{21}-\Gamma_1);\qquad \ell=2\,(\Gamma^3_{22}-a\Gamma^3_{11}).$$

Т е о р е м а. Точки $E_1(1,0,0)$ и $E_2(-1,0,0)$, пересечения ребра $\{A\bar{e}_1\}$ репера с коникой F_1 являются её фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы непосредственно следует из (3.7).

Т е о р е м а. Формы Пфаффа ω^1 и ω^2 являются полными дифференциалами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.6), получаем

$$\mathcal{D}\omega^1=0,\quad \mathcal{D}\omega^2=0.$$

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{L}_0$ называется парой $\mathcal{L}_0'$, если

$$\Gamma_1=2a\Gamma^2_{21}. \qquad (3.8)$$

Учитывая уравнение (3.8) и системы (3.6) и (3.3) убеждаемся, что пары $\mathcal{L}'_0$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Точки $N_1(0, \frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ и $N_2(0, -\frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ пересечения ребра $\{A\bar{e}_2\}$ репера с коникой F_1, входящей в пару $\mathcal{L}'_0$, являются её фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (3.8) коэффициент последнего уравнения системы (3.7) обращается в нуль. Таким образом теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Две оставшиеся фокальные точки коники F_1 определяются из системы уравнений:

$$(x^1)^2 + a(x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \quad bx^1 + cx^2 + \ell = 0 \qquad (3.9)$$

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве, Труды геометрического семинара, 2, 1969, ВИНИТИ

2. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. (Труды Московского матем. общества), 2, 1953, ГИТТЛ.

3. Ткач Г.П., Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 2 (Тр. Калининградского ун-та), 1971.

4. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. Настоящий сборник.

5. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

ШЕВЧЕНКО Ю.И.

КЛАССЫ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ.

В n-мерном аффинном пространстве рассмотрены N-параметрические многообразия пар плоскостей, с помощью которых произведена классификация аффинных связностей. Показано, что специальная точечная аффинная связность (введенная в работе) обобщает индуцированную связность $(N=m)$ и классическую связность $(N=k)$.

Пусть в n-мерное аффинное пространство погружено N-параметрическое многообразие пар плоскостей $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}'_m)$, где $\mathcal{L}_k$ -центрированная k-плоскость, $\mathcal{L}'_m$ — m-плоскость. Ограничимся рассмотрением таких пар плоскостей, для которых

$$\mathcal{L}_k \not\subset \mathcal{L}'_m \qquad (1)$$

и плоскости $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}'_m$ имеют ровно

$$p = dim\,(\mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}'_m) \qquad (2)$$

общих несобственных точек (линейно независимых).

Многообразие пар плоскостей $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}'_m)$ будем называть:

1) точечным, если $p = 0$,

2) линейным, если $p > 0$,

3) специальным, если $n + p - k - m = 0$.