$$\omega_4^2=\omega_1,\ \omega_4^1=\omega_2,\ \Omega_2=a\omega_2^3+b\omega_1^3,\ \omega_3^4=-a\omega_4^1-b\omega_4^2, \quad (9)$$

$$\begin{cases} da = a(\omega_1^1+\omega_3^3-2\omega_4^4)-\omega_3^2+b\omega_1^2+h\omega_1^3, \\ db = b(\omega_2^2+\omega_3^3-2\omega_4^4)-\omega_3^1+a\omega_2^1+h\omega_2^3, \\ \frac{1}{2}dh = h(\omega_3^3-\omega_4^4)+a\omega_3^1+b\omega_3^2, \\ dm = m(\omega_1^1+\omega_4^4-2\omega_2^2)-2mn\omega_2+n\omega_1^2+\tau\omega_1+k\omega_1^3, \\ dn = n(\omega_2^2+\omega_4^4-2\omega_2^2)-2n^2\omega_2+\omega_4^2+m\omega_2^1+\tau\omega_2+k\omega_2^3, \\ dk = k(\omega_3^3+\omega_4^4-2\omega_2^2)-2kn\omega_2-\omega_4^1+m\omega_3^1+n\omega_3^2+\tau\omega_3^4, \\ \frac{1}{2}d\tau = \tau(\omega_4^4-\omega_2^2)-\tau n\omega_2+m\omega_4^1+n\omega_4^2. \end{cases} \quad (10)$$

Исследуя систему (4),(7)-(10), убеждаемся, что конгруэнции H_0 определяются вполне интегрируемой системой уравнений и что справедлива следующая

Т е о р е м а . Конгруэнции H_0 обладают следующими геомет рическими свойствами: I) многообразие прямых $(A_i A_4)$-одномерное 2) поверхности (A_i) вырождаются в линии; 3) одно семейство тор сов конгруэнции $(A_i A_3)$ соответствует координатным линиям $\omega_i=$ 4) поверхность (A_4) является невырожденной инвариантной квадри кой $\Phi \equiv (mh-nb)(x^3)^2-mx^1x^2-nx^1x^3+bmx^2x^3+x^3x^4=0$.

Библиографический список

I. К о р с а к о в а Л.Г. Об одном классе конгруэнций пар коник в P_3 // Тезисы докл. VI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин, 1984. С.63.

2. К о р с а к о в а Л.Г. Пары конгруэнций коник в P_3, не касающихся линии пересечения своих плоскостей // Тез.докл. Всесоюзн.конф. по неевклидовой геометрии " I50 лет геометрии Лобачевского". - Казань: Изд-во Казанского ун-та. 1976. С.I04.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I9 1988

УДК 514.75

О ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В ПРЯМОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.В. М а л а х о в с к и й
(Калининградский университет)

Исследуются невырожденные двумерные многообразия в прямом произведении двух трехмерных проективных пространств $P_3^{(1)}$ и $P_3^{(2)}$. Построен частично канонизированный репер таких многообразий, определены на них четыре инвариантных однопараметрических семейства и выделены некоторые подклассы подмногообразий со специальными свойствами проекций на базисные пространства $P_3^{(1)}, P_3^{(2)}$.

Рассмотрим прямое произведение P двух трехмерных проективных пространств $P_3^{(1)}, P_3^{(2)}$ [I, с.224]

$$P=P_3^{(1)}\times P_3^{(2)}=\{(M_1,M_2)\,|\,M_1\in P_3^{(1)},\ M_2\in P_3^{(2)}\}. \quad (I)$$

Отнесем пространство P к подвижному реперу $R=\{A_{1,\alpha};A_{2,\alpha}\}$, $\alpha=0,I,2,3$. Тогда

$$M_i=x_i^\alpha A_{i,\alpha} \qquad (i=I,2). \quad (2)$$

Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$dA_{i,\alpha}=\omega_{i,\alpha}^\beta A_{i,\beta}, \quad (3)$$

где формы Пфаффа $\omega_{i,\alpha}^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_{i,\alpha}^\beta=\omega_{i,\alpha}^\gamma\wedge\omega_{i,\gamma}^\beta \quad (4)$$

и условию эквипроективности $\omega_{i,\alpha}^\alpha=0$.

Рассмотрим в пространстве P m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ ($m=\overline{I,5}$). Отнесем это многообразие к реперу нулевого порядка, расположив вершины $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ в проекциях текущей точки $M\in\mathfrak{M}_m$ в пространства $P_3^{(1)}, P_3^{(2)}$. Тогда формы Пфаффа

$$\omega_{i,0}^{\hat\alpha} \qquad (\hat\alpha,\hat\beta=I,2,3) \quad (5)$$

станут первичными. Параметрически многообразие $\mathfrak{M}_m$ задается системой уравнений Пфаффа

$$\omega^{\hat{\alpha}}_{i,0} = t^{\hat{\alpha}}_{i,k}\,\theta^k, \tag{6}$$

где линейно независимые формы Пфаффа θ^k ($k=1,2,\ldots,m$) удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\theta^k = \theta^j \wedge \theta^k_j, \quad \mathcal{D}\theta^k_j = \theta^h_j \wedge \theta^k_h + \theta^h \wedge \theta^k_{jh}, \\ \mathcal{D}\theta^k_{j_1\ldots j_p} = \sum\limits_{s=1}^{m} \dfrac{1}{s!(p-s)!}\,\theta^h_{(j_1\ldots j_s} \wedge \theta^k_{j_{s+1}\ldots j_p)h} + \theta^h \wedge \theta^k_{j_1\ldots j_p h}, \end{cases} \tag{7}$$

а совокупность форм $\theta^k_{j_1\ldots j_p}$ ($p=1,2,\ldots$) обладает расслоенной структурой по отношению к формам θ^k [2].
Продолжая (6), находим

$$dt^{\hat{\alpha}}_{i,k} + t^{\hat{\beta}}_{i,k}\,\omega^{\hat{\alpha}}_{i,\hat{\beta}} - t^{\hat{\alpha}}_{i,j}\,\theta^j_k + t^{\hat{\alpha}}_{i,k}\,\omega^0_{i,0} = t^{\hat{\alpha}}_{i,kh}\,\theta^h, \tag{8}$$

причем

$$t^{\hat{\alpha}}_{i,(kh)} = 0\,; \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} t^{\hat{\alpha}}_{1,k} \\ t^{\hat{\beta}}_{2,k} \end{pmatrix} = m. \tag{9}$$

О п р е д е л е н и е I. Многообразие $\mathfrak{M}_2 \subset P$ размерности $m=2$ называется невырожденным, если

$$\operatorname{rang}(t^{\hat{\alpha}}_{1,k}) = \operatorname{rang}(t^{\hat{\beta}}_{2,k}) = 2. \tag{10}$$

Проекциями невырожденного многообразия в пространствах $P^{(1)}_3$ и $P^{(2)}_3$ являются невырожденные поверхности S_1 и S_2.

Осуществим следующую канонизацию репера $\{A_{1,\alpha}\,;\,A_{2,\beta}\}$. Придадим компонентам $t^{\hat{\alpha}}_{i,k}$ значения:

$$t^i_{i,i} = 1\,; \quad t^i_{i,\bar{i}} = 0\,; \quad t^3_{i,k} = 0. \tag{11}$$

Здесь и в дальнейшем $i, \bar{i}, h, k = 1,2$; $\bar{i}$ принимает такое значение, которое не принимает i ; по индексам i , $\bar{i}$ суммирование не производится.

Уравнения (6) в силу (II) приводятся к виду:

$$\omega^i_{i,0} = \theta^i; \quad \omega^{\bar{i}}_{i,0} = t^{\bar{i}}_{i,k}\,\theta^k; \quad \omega^3_{i,0} = 0. \tag{12}$$

На основании леммы Остиану о канонизации репера [3] существует частично канонизированный репер, относительно которого компоненты $t^{\hat{\alpha}}_{i,k}$ будут иметь значения (II) на всем многообразии $\mathfrak{M}_2$.

Геометрически канонизация (II) означает, что вершины $A_{i,k}$ репера R располагаются в касательной плоскости к поверхности S_i. Продолжая последнюю группу уравнений (I2), получим

$$\omega^3_{i,h} = a_{i,hk}\,\omega^k_{i,0}\,; \quad a_{i,(hk)} = 0. \tag{13}$$

Поместим вершину $A_{i,i}$ на касательной к одной из асимптотических линий поверхности S_i , а вершину $A_{i,\bar{i}}$ – на касательной к линии, которая соответствует выбранной асимптотической линии на поверхности $S_{\bar{i}}$. Исключая случай, когда поверхности S_1 и S_2 являются торсами, и осуществляя надлежащую нормировку вершин в R, получим

$$\omega^{\bar{i}}_{i,0} = \theta^{\bar{i}}\,; \quad a_{i,ii} = 0\,; \quad a_{i,i\bar{i}} = a_{i,\bar{i}i} = 1. \tag{14}$$

При этом координатная сеть линий $\theta^1\theta^2=0$ становится инвариантной.

О п р е д е л е н и е 2. Линиями Γ_i на многообразии $\mathfrak{M}_2$ называются одномерные подмногообразия, определяемые уравнениями $\theta^{\bar{i}}=0$. Сетью Σ называется сеть, образованная линиями Γ_1 и Γ_2.

Уравнение асимптотических линий на поверхности S_i принимает вид:

$$2\theta^i\theta^{\bar{i}} + a_{i,\bar{i}\bar{i}}\,(\theta^{\bar{i}})^2 = 0. \tag{15}$$

О п р е д е л е н и е 3. Многообразием $\mathfrak{A}_0$ называется многообразие $\mathfrak{M}_2$, у которого сеть Σ отображается на асимптотическую сеть поверхностей S_1 и S_2.

Из (I5) следует, что многообразие $\mathfrak{A}_0$ выделяется соотношениями

$$a_{1,22} = 0\,; \quad a_{2,11} = 0. \tag{16}$$

О п р е д е л е н и е 4. Линиями $\tilde{\Gamma}_i$ на многообразии $\mathfrak{M}_2$ называются линии, отображающиеся на поверхность S_i в линии, сопряженные линиям $\theta^i=0$. Сеть линий $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$ называется сетью $\tilde{\Sigma}$.

Из (I5) следует, что линии $\tilde{\Gamma}_i$ определяются уравнениями

$$\theta^i + a_{i,\bar{i}\bar{i}}\,\theta^{\bar{i}} = 0. \tag{17}$$

Сравнивая (I7) с (I6), убеждаемся, что сети линий Σ и $\tilde{\Sigma}$ совпадают только на многообразии $\mathfrak{A}_0$. Рассмотрены некоторые подклассы конгруэнций $\mathfrak{A}_0$ со специальными свойствами базовых поверхностей S_1 и S_2 (когда одна из этих поверхностей или обе являются линейчатыми или квадриками).

Библиографический список

I. Ходж В. Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. М.: ИЛ. I954.

2. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4 Всесоюз. матем. съезда, I96I. Л.: Наука, I964. Т.2.

3. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Revue de mathématiques pure et appliques. Acad. RPR. VII. №2. 1962. P. 231-240.