где A, B, C – дифференцируемые функции от α, β, γ.
Диагональные элементы матрицы компонент метрического тензора отыскиваются из системы уравнений:

$$X^{\alpha_1}_{\alpha_k} \dot{g}_{\alpha_1 \alpha_k} + g_{\alpha_k \alpha_k} - g_{\alpha_1 \alpha_1} = 0 \quad (k=2,3,\dots,n). \quad (5)$$

Совокупность функций

$$g_{\alpha_k \alpha_k} = x^{\alpha_k}(A x^{\alpha_k} + B u^{\alpha_k}) + u^{\alpha_k}(B x^{\alpha_k} + C u^{\alpha_k})$$

образует частное решение системы уравнений (5).
Общее решение уравнений, полученных из операторов вращений и переносов, выражается формулой

$$g_{ij} = 2\mathcal{D}\left[a e_i \delta_{ij} + \frac{2b\, e_i e_j u^i u^j}{e_1 u^{1^2} + \dots + e_n u^{n^2}}\right] \quad (6)$$

$$(a, b, k \in R,\ a \neq 0,\ a + 2b \neq 0,\ e = \pm 1,\ \mathcal{D} = [1 + \tfrac{k}{4} e_i x^{i^2}]^{-2}).$$

Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Т е о р е м а. Для того, чтобы регулярное общее метрическое пространство опорных векторных плотностей веса W допускало группу движений G_r максимального порядка $r = \frac{1}{2}(n+1)n$, необходимо и достаточно, чтобы компоненты метрического тензора g задавались формулами (6).

Список литературы

1. Егоров А.И. Лакунарные финслеровы пространства. Математ.сб. 116/158, № 3 (11), 1981, с.310-314.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вы.15 1984

УДК 514.75

Л.А.Ж а р и к о в а

О СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С КОНГРУЭНЦИЕЙ НЕЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В A_n

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается конгруэнция $\mathcal{R}$ нецентральных квадратичных элементов $\mathcal{F}$. Выделяется многообразие Φ гиперплоскостей P образующего элемента $\mathcal{F}$ конгруэнции $\mathcal{R}$. Показано, что с конгруэнцией $\mathcal{R}$ ассоциируется главное расслоение $G_{n^2}(\mathcal{R})$, базой которого является конгруэнция $\mathcal{R}$, а типовым слоем – n^2-членная подгруппа стационарности гиперплоскости P. Показано, что конгруэнция $\mathcal{R}$ индуцирует поле одномерных направлений l, не параллельных гиперплоскости P, которые позволяют задать связность в расслоении $G_{n^2}(\mathcal{R})$, дана геометрическая характеристика подобъектов объекта связности Γ.

Отнесем n-мерное аффинное пространство A_n к подвижному реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами $dA = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha$, $d\bar{e}_\alpha = \omega^\beta_\alpha \bar{e}_\beta$, где формы Пфаффа ω^α, ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta, \quad \mathcal{D}\omega^\gamma_\beta = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\gamma_\alpha.$$

В пространстве A_n рассмотрим конгруэнцию (n-1)-параметрическое семейство) $\mathcal{R}$ нецентральных квадратичных элементов ((n-2)-мерных параболоидов второго порядка) $\mathcal{F}$ и проведем специализацию репера $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ следующим образом: начало репера точку A и векторы $\bar{e}_i$ $(i, j, k, \dots = \overline{1, n-1})$ поместим на гиперплоскость P образующего элемента конгруэнции. В таком репере уравнения квадрики $\mathcal{F}$ примут вид:

$$\begin{cases} a_{ij}x^i x^j + 2a_i x^i + 1 = 0, & \det(a_{ij}) = 0, \\ x^n = 0, & \det\begin{pmatrix} a_{ij} & a_i \\ a_i & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \end{cases} \tag{1}$$

формы $\omega_i^n \overset{def}{=} \omega_i$, ω^n являются главными, а остальные $\omega^i, \omega_i^j, \omega_n^i, \omega_n^n$ -вторичными.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции запишется в виде:

$$\begin{cases} \nabla a_{ij} = a_{ij}^k \omega_k, \\ \nabla a_i - a_{ij}\omega^j = a_i^k \omega_k, \\ a_i\omega^i = b^k\omega_k, \quad \omega^n = \Lambda^k \omega_k. \end{cases} \tag{2}$$

Базисные формы ω_i и слоевые удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \omega_n^n,$$
$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i + \Lambda^k\omega_k \wedge \omega_n^i,$$
$$\mathcal{D}\omega_n^i = \omega_n^j \wedge \omega_j^i + \omega_n^n \wedge \omega_n^i,$$
$$\mathcal{D}\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_j \wedge \omega_n^i,$$
$$\mathcal{D}\omega_n^n = \omega_n^i \wedge \omega_i.$$

Анализируя эти уравнения, заключаем, что с конгруэнцией π ассоциируется главное расслоение с базисными формами ω_i, слоевыми формами которого служат вторичные формы. Базой его является конгруэнция π, а типовым слоем - n^2-членная подгруппа стационарности гиперплоскости P.

Фундаментально - групповая связность в ассоциированном расслоении задается с помощью форм связности

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i - \Gamma^{ij}\omega_j, \quad \tilde{\omega}_i^j = \omega_i^j - \Gamma_i^{jk}\omega_k,$$
$$\tilde{\omega}_n^i = \omega_n^i - L^{ij}\omega_j, \quad \tilde{\omega}_n^n = \omega_n^n - \Gamma^i\omega_i,$$

где компоненты объекта связности $\Gamma = \{\Gamma^{ij}, \Gamma_i^{jk}, L^{ij}, \Gamma^i\}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla\Gamma^{ij} - \Gamma^{ij}\omega_n^n - \Gamma_k^{ij}\omega^k + \Lambda^j\omega_n^i = \Gamma^{ijk}\omega_k,$$
$$\nabla\Gamma_i^{jk} - \Gamma_i^{jk}\omega_n^n + \delta_i^k\omega_n^j = \Gamma_i^{jkl}\omega_l,$$
$$\nabla L^{ij} - 2L^{ij}\omega_n^n + (\Gamma^j\delta_k^i - \Gamma_k^{ij})\omega_n^k = \check{\Gamma}^{ijk}\omega_k,$$
$$\nabla\Gamma^i - \Gamma^i\omega_n^n - \omega_n^i = \hat{\Gamma}^{ij}\omega_j.$$

Рассмотрим поле направлений L, не параллельных гиперплоскости P.

Т е о р е м а 1. Поле одномерных направлений L позволяет задать связность в ассоциированном расслоении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поле одномерных направлений L задается вектором

$$\bar{e} = \bar{e}_n + \lambda^i\bar{e}_i. \tag{3}$$

В силу его относительной инвариантности $\delta\bar{e} = \theta\bar{e}$ и

$$\nabla\lambda^i - \lambda^i\omega_n^n + \omega_n^i = \lambda^{ij}\omega_j.$$

Фундаментальный объект первого порядка $\Lambda = \{a_{ij}, a_{ij}^k, a_i, a_i^k,$ и оснащающий квазитензор $\lambda = \{\lambda^i\}$ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^{ij} = \lambda^i\Lambda^j, \quad \Gamma_j^{ik} = \lambda^i\delta_j^k, \quad L^{ij} = -\lambda^i\lambda^j, \quad \Gamma^i = -\lambda^i.$$

Т е о р е м а 2. Конгруэнция π индуцирует поле L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем последовательные продолжения последнего уравнения системы (2):

$$\nabla\Lambda^i - \omega^i = \Lambda^{ij}\omega_j,$$
$$\nabla\Lambda^{ij} - \Lambda^{ij}\omega_n^n = \Lambda^{ijk}\omega_k,$$
$$\nabla\Lambda^{ijk} - 2\Lambda^{ijk}\omega_n^n - (\Lambda^{kj}\omega_n^i + \Lambda^{ik}\omega_n^j) = \Lambda^{ijkl}\omega_l.$$

В общем случае $\det(\Lambda^{ij}) \neq 0$. Тогда величины $\Lambda_{ij}: \Lambda_{ij}\Lambda^{jk} = \delta_i^k$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям $\nabla\Lambda_{ij} + \Lambda_{ij}\omega_n^n = \Lambda_{ij}^k\omega_k$. Справедливость теоремы следует из того, что квазитензор λ^i можно охватить по формулам: $\lambda^i = -\Lambda_{kj}\Lambda^{kji}$ Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. В ассоциированном расслоении возникает внутренняя связность.

Подобъекты объекта связности Γ могут быть охарактеризованы следующим образом: 1/Подобъект $\{\Gamma^{ij}, \Gamma^{ik}_j\}$ объекта связности Γ определяет проекцию гиперплоскости $P+dP$, смежной к гиперплоскости P параболоида, на гиперплоскость P параллельно направлению $\bar{e}$; 2/Подобъект $\{\Gamma^k\}$ объекта связности Γ определяет проекцию одномерных направлений $\bar{e}+d\bar{e}$, смежных $\bar{e}$, на направление $\bar{e}$ параллельно гиперплоскости P параболоида; 3/Подобъект $\{\Gamma^{ik}_j\}$ объекта связности определяет проекцию (n-1)-мерных направлений $E+dE$ смежных к $E=\{\bar{e}_i\}$, на исходные направления E, параллельно направлению; 4/Направление $\bar{e}$ инвариантно относительно преобразования параллельного переноса; 5/ характеристическую точку M гиперплоскости P параболоида переносить параллельно в связности Γ нельзя.

Обозначим через ℓ -прямую с направляющим вектором $\bar{e}$ и проходящую через точку M. Из 5/ заключаем, что нормаль ℓ гиперплоскости P параболоида переносить параллельно в связности Γ нельзя.

Список литературы

1. Малаховский В.С., Остиану Н.М. Поля геометрических объектов в однородных и обобщенных пространствах. Деп. ВИНИТИ АН СССР, М., 1979, №3640-79 ДРП.

2. Шевченко Ю.И. Параллельные перенесения на поверхности. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10, Калининград, 1979, с. 154-158.

3. Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с. 126-130.

4. Лаптев Г.Ф. Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. - Тр. Геометрич. семинара, 1969, т. 2 с. 161-178.

УДК 514.75

М.Г. Зограбян

К ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕГО ОСНОВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В статье рассматривается орбита G-пространства $\mathcal{M}(n)$ множества квадратных матриц n-го порядка, G-структура которого определяется отображением

$$G\times\mathcal{M}(n)\to\mathcal{M}(n):\ (a,x)\to axa^{-1}, \qquad (1)$$

где $G\subset GL(n,\mathbb{R})$ -группа линейных преобразований вида $G=\left\{\begin{pmatrix} E_m & 0\\ a & T\end{pmatrix} \middle| \ a=(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m)\in\mathbb{R}^{n-m},\ T\in GL(n-m,\mathbb{R})\right\}$.
Общее основное пространство X определяется как орбита в G-пространстве $\mathcal{M}(n)$, с начальным элементом

$$\mathcal{E}_m=\begin{pmatrix} 0_m & 0\\ 0 & \mathcal{E}\end{pmatrix},\quad \mathcal{E}=\begin{pmatrix} E_k & 0\\ 0 & -E_p\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $\mathcal{E}\neq E_{n-m}$, $n-m=k+p$. G-пространство X есть подпространство пространства троек, минимальный многочлен $m(\lambda)$ которого равен $\lambda^3-\lambda$. Изучаются касательное расслоение, полиномиальные морфизмы и фокальные образы общего основного пространства.

1. Рассмотрим орбиту X в G-пространстве $\mathcal{M}(n)$, G-структура которого задана отображением (1), начальным элементом которой будет элемент (2).

В этом случае легко подсчитать, что

$$X=\left\{x=\begin{pmatrix} 0_m & 0\\ -\tilde{x}a & \tilde{x}\end{pmatrix}\right\},$$

где $\tilde{x}^2=E_{k+p}$, $\tilde{x}=T\mathcal{E}T^{-1}$ -есть элемент пространства пар [3,4]. Так как $\mathcal{E}_m^3=\mathcal{E}_m$, то $x\in X \Rightarrow x^3=x \Leftrightarrow m(\lambda)=\lambda^3-\lambda$, и поэтому общее основное пространство X является подпространством пространства троек.