геометрии.Итоги науки и техники,1975,7,с.231-248.

4.Л а п т е в Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Труды Моск.матем.об-ва,1953,2, с.275-382.

5.М и х а й л о в П.Н. К геометрии поверхностей постоянной средней кривизны.-В сб.:"Геометрия погруженных многообразий".М.,1980,с.62-66.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Ж. Н у р п е и с о в

К ГЕОМЕТРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В E_n

В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические свойства ($n-1$)-распределения в евклидовом пространстве E_n.

Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $R^x=(x,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$,инфинитезимальное перемещение которого определяется дифференциальными уравнениями:

$$d\vec{x}=\omega^J\vec{e}_J,\quad d\vec{e}_J=\omega_J^K\vec{e}_K, \tag{1}$$
$$(J,K,L,\dots=1,2,\dots,n;\quad i,j,k,\dots=1,2,\dots,n-1).$$

Формы ω^J и ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega^J=\omega^K\wedge\omega_K^J,\quad \mathcal{D}\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K. \tag{2}$$

Пусть в некоторой области $G\subset E_n$ задана вещественная функция $f(x^1,x^2,\dots,x^n)$. Условие $f=const$ расслаивает область G на ∞^1 поверхностей V_{n-1} (поверхностей уровня этого инварианта),касательные пространства к этим поверхностям задают в области G $(n-1)$-распределение Δ_{n-1}.

Векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_{n-1}$ репера расположим в площадке $\Delta_{n-1}(x)$.Тогда дифференциальные уравнения распределения будут:

$$\omega_i^n=\Lambda_{iK}^n\omega^K,\quad (\Lambda_{ij}^n=\Lambda_{ji}^n). \tag{3}$$

Вектор $\vec{e}_n$ репера R^x направим по направлению X, ортогональному площадке $\Delta_{n-1}(x)$.Получим $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_n=0$,

следовательно,
$$\omega_i^n+\gamma_{ij}\,\omega_n^j=0, \qquad (4)$$
где $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\,\vec{e}_j$.

Продолжив систему уравнений (3), перенеся все слагаемые, содержащие главные формы, в правую часть, находим:
$$d\Lambda_{ij}^n-\Lambda_{it}^n\omega_j^t-\Lambda_{tj}^n\omega_i^t=\Lambda_{ij\varkappa}^n\omega^\varkappa,$$
$$d\Lambda_{in}^n-\Lambda_{kn}^n\omega_i^k=\Lambda_{in\varkappa}^n\omega^\varkappa.$$

Система величин Λ_{ij}^n образует тензор; мы будем предполагать $\det\|\Lambda_{ij}^n\|\neq 0$; Λ_{in}^n образуют геометрический объект типа ковектора.

В силу равенства (4) скалярная кривизна гиперповерхности V_{n-1} представится в виде:
$$R_{jpq\cdot}^{\;i}=\gamma^{ik}(\Lambda_{kp}^n\Lambda_{jq}^n-\Lambda_{kq}^n\Lambda_{jp}^n),$$
отсюда:
$$R_{sjpq}=\Lambda_{sp}^n\Lambda_{jq}^n-\Lambda_{sq}^n\Lambda_{jp}^n. \qquad (5)$$

Пусть площадки $\Delta_{n-1}(x)=\Delta(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1})$ параллельно переносятся вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Delta(y)$, $y\notin\Delta_{n-1}(x)$. Если $\vec{H}\in\Delta_{n-1}(x)$ и точка x смещается вдоль интегральной кривой распределения $\Delta(y)$, то
$$(d\vec{H})/y\in\Delta_{n-1}(x). \qquad (6)$$

Пусть $\vec{H}=h^i\vec{e}_i$, $y=\eta^\varkappa\vec{e}_\varkappa$. Учитывая соотношения (3) и (6), получим:
$$\eta^\varkappa h^i\Lambda_{i\varkappa}^n=0. \qquad (7)$$

В частности, условию (7) удовлетворяют базисные векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_{n-1}$, тогда $h^i=\delta^{ij}$ и
$$\eta^\varkappa\Lambda_{i\varkappa}^n=0. \qquad (8)$$

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы выполнялось соотношение $y=tX$, необходимо и достаточно, чтобы геометрический объект Λ_{in}^n был нулевым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y=tX$, тогда $\eta^i=0$, $\eta^n\neq 0$. Из соотношения (8) следует $\Lambda_{in}^n=0$. Обратно, если положим $\Lambda_{in}^n=0$, то так как $\det\|\Lambda_{ij}^n\|\neq 0$ система $\eta^i\Lambda_{ij}^n=0$ имеет единственное нулевое решение, $\eta^i=0$, значит, $y=tX$.

Имеем направление X, ортогональное распределению Δ_{n-1}, тогда в E_n возникает двумерное распределение $\Delta_2=\Delta(X,y)$, где вдоль интегральной кривой 1-распределения $\Delta(y)$ имеем параллельное перенесение площадок $\Delta_{n-1}(x)=\Delta(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_{n-1})$.
Это распределение и $(n-1)$-распределение $\Delta_{n-1}=\Delta(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1})$ пересекаются по однородному распределению Δ_1:
$$\Delta_1=\Delta_2\cap\Delta_{n-1}$$
Пусть векторное поле $\vec{u}$ порождает это 1-распределение Δ_1: $\Delta_1=\Delta(\vec{u})$. Тогда $\vec{u}\in\Delta_2$ и имеем
$$\vec{u}=\lambda\vec{e}_n+\mu y=\mu\eta^i\vec{e}_i+(\lambda+\mu\eta^n)\vec{e}_n,$$
$$\vec{u}=u^i\vec{e}_i$$
Отсюда находим:
$$u^i=\mu\eta^i,\quad \lambda+\mu\eta^n=0,$$
то есть
$$u^i=(-1)^{i-1}\mu\det\|\Lambda_{k\mathcal{T}_i}^n\|$$
$$(\mathcal{T}_i\neq i;\ \mathcal{T}_i=1,2,\dots,n).$$

Когда точка x смещается вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Delta(\vec{u})$ на поверхности $V_{n-1}(\omega^n=0)$ имеем: $\omega^i=\theta_1u^i$, где θ_1 параметрическая форма, $\mathcal{D}\theta_1=\theta_2\wedge\theta_1$. Для точки $\vec{F}=\vec{x}+\lambda\vec{e}_n$ ортогонального направления $\Delta(X)$ находим
$$d\vec{F}=(\omega^i+\lambda\omega_n^i)\vec{e}_i+d\lambda\,\vec{e}_n.$$

Чтобы имело место соотношение: $d\vec{F}\in\Delta(X)$, смещение точки x вдоль интегральной кривой $\Delta(\vec{u})$ должно удовлетворять условию [1]:
$$\omega^i+\lambda\omega_n^i=\theta_1u^i+\lambda\omega_n^i=0$$

или в силу (3) и (4):

$$(\Lambda^n_{ki}-\rho\gamma_{ki})u^i=0,$$

где $\rho=\frac{1}{\lambda}$. Допустим, что корни ρ_i уравнения

$$\det\|\Lambda^n_{ki}-\rho\gamma_{ki}\|=0$$

простые, тогда уравнения

$$(\Lambda^n_{tk}-\rho_i\gamma_{tk})u^k=0$$

определяют в точке x n-1 попарно ортогональных направлений (главные направления тензора Λ^n_{tk} [2]). Отсюда следует:

Т е о р е м а 2. Интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$ являются линиями кривизны относительно $\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_k(-1)^{k-1}(\Lambda^n_{jk}-\rho\gamma_{jk})\det\|\Lambda^n_{i\ell_k}\|=0\ (\ell_k\neq k),$$

где ρ -корень уравнения $\det\|\Lambda^n_{ik}-\rho\gamma_{ik}\|=0.$

Выясним, когда интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$ являются геодезическими. При смещении точки x вдоль интегральной кривой этого распределения имеем:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i=\Theta_1u^i\vec{e}_i=\Theta_1\vec{u}. \qquad (9)$$

Находим

$$d^2\vec{x}=d\Theta_1\vec{u}+\Theta_1(du^i+u^j\omega^i_j)\vec{e}_i+\Theta_1u^i\omega^n_i\vec{e}_n$$

Соприкасающаяся плоскость в точке x этой кривой

$$\Pi_2(\vec{u})=[x,d\vec{x},d^2\vec{x}].$$

Чтобы линия была геодезической $(\Pi_2(\vec{u})\supset\Delta(X))$, должно быть:

$$du^i+u^j\omega^i_j=0 \qquad (10)$$

Положим $\vec{e}_1\in\Delta(\vec{u})$, тогда из соотношения (10) следует:

$$\omega^i_1=0 \qquad (11)$$

Продолжив уравнение (11), находим:

$$\mathcal{D}\omega^i_1=2\gamma^{ij}(\Lambda^n_{jp}\Lambda^n_{1q}-\Lambda^n_{jq}\Lambda^n_{1p})\omega^p\wedge\omega^q=0,\quad p<q$$

то есть

$$\gamma^{ij}(\Lambda^n_{jp}\Lambda^n_{1q}-\Lambda^n_{jq}\Lambda^n_{1p})=0;$$

умножив на γ_{ti} и суммируя по i, получим

$$\Lambda^n_{tp}\Lambda^n_{1q}-\Lambda^n_{tq}\Lambda^n_{1p}=0.$$

Поэтому верна

Т е о р е м а 3. Если интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$, $\vec{e}_1\in\Delta(\vec{u})$ являются геодезическими, то $\det\|\Lambda^n_{i\ell_k}\|=0$ и тензор кривизны гиперповерхности V_{n-1} удовлетворяет условию: $R_{stpq}=0$, если хотя бы один из индексов равен единице ($\ell_k\neq k;\ k\neq 1$).

Аналогично убеждаемся, что справедлива

Т е о р е м а 4. Чтобы геодезическая линия $\Delta(\vec{u})$, $\vec{e}_1\in\Delta(\vec{u})$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma^{ik}\Lambda^n_{k1}=0\quad(i\neq1).$$

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. - Лит. матем. сб., УI, 4, 1966, 475-491.

2. Э й з е н х а р т Л.П. Риманова геометрия. Изд-во иностр. лит., М.-Л., 1948.