качестве следствия основную теорему работы [1]. В случае же вполне геодезического гиперраспределения справедливо

Следствие 3. Пусть $(M,\langle,\rangle)$ - компактное ориентированное риманово многообразие. Если $Ric_M > 0$, то многообразие не допускает вполне геодезических гиперраспределений. Если же $Ric_M \leqslant 0$, то любое вполне геодезическое гиперраспределение, если оно существует на многообразии, является слоением.

Данное следствие обобщает один из основных результатов статьи [5].

Библиографический список

1. Oshikiri G. A remark on minimal foliation // Tohoku Math. J. 1981. V 33. P. 133-137.
2. Reinhart B.L. Differential geometry of foliations. Berlin - New York, 1983. 190p.
3. Я н о К., Б о х н е р С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152 с.
4. Akhil R. Structural equations and an integral formula for foliated manifolds // Geom. dedic. 1968. V20. №1. P.85-91.
5. Hagan T., Lutz R. Champs d'hyperplans totalement géodésiques sur les sphéres // Astérisque. 1983. №107-108. P. 189-200.

УДК 514.76

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ В СМЫСЛЕ Э.КАРТАНА И Э.БОРТОЛОТТИ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ

А.В.С т о л я р о в

(Чувашский педагогический институт)

Настоящая статья является продолжением работы [1]. С существенным использованием двойственной теории регулярной m-мерной гиперполосы H_m, погруженной в n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$, показано, что два вида частных оснащений (в смысле Э.Картана и Э.Бортолотти) являются двойственными по отношению друг к другу.

1. Рассмотрим классическое пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое, согласно Э.Картану [2], [3], с по-

мощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega_{\mathcal{J}}^{\bar{\mathcal{K}}}$, подчиненных структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}}^{\bar{\mathcal{K}}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\bar{\mathcal{K}}} + \frac{1}{2} R_{\mathcal{J}PQ}^{\bar{\mathcal{K}}} \omega_0^P \wedge \omega_0^Q, \quad \omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{L}} = 0, \qquad (1)$$
$$\mathcal{J},\bar{\mathcal{K}},\mathcal{L} = \overline{0,n}; \quad \mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},P,Q = \overline{1,n}.$$

В пространстве $P_{n,n}$ рассмотрим регулярную гиперполосу H_m $(m<n-1)$ [4]; в точечном репере первого порядка $\{A_{\mathcal{J}}\}$ дифференциальные уравнения многообразия $H_m \subset P_{n,n}$ имеют вид [5]:

$$\begin{cases} \omega_0^n = \omega_0^v = \omega_v^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j, \\ \omega_i^v = \Lambda_{ij}^v \omega_0^j, \quad \omega_v^i = \Lambda_{vj}^i \omega_0^j, \quad u,v,w = \overline{m+1,n-1}, \; i,j,k,\ell,s,t = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (2)$$

Задание гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ индуцирует пространство проективной связности $P_{m,n}$ с m-мерной базой (базисная поверхность гиперполосы) и n-мерными центропроективными слоями P_n, ибо из уравнений (1) в силу $\omega_0^\alpha = 0$ (см. (2)) имеем

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{J}}^{\bar{\mathcal{K}}} = \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}} \wedge \omega_{\mathcal{L}}^{\bar{\mathcal{K}}} + \frac{1}{2} R_{\mathcal{J}st}^{\bar{\mathcal{K}}} \omega_0^s \wedge \omega_0^t, \quad \omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{L}} = 0; \qquad (3)$$

здесь компоненты R_{0ij}^α, R_{vij}^n, R_{0st}^i, R_{ist}^n, R_{0st}^0, R_{nst}^n с компонентами геометрических объектов первого, второго, третьего и четвертого порядков гиперполосы связаны конечными соотношениями (см., например, [1], [6]):

$$2\Lambda_{[ij]}^n = -R_{0ij}^n, \; 2\Lambda_{[ij]}^v = -R_{0ij}^v, \; 2\Lambda_{k[i}^n \Lambda_{|v|j]}^k = R_{vij}^n, \; 2\Lambda_{i[jk]}^n = -R_{ijk}^n +$$
$$+\Lambda_{is}^n R_{0jk}^s, \; 2\Lambda_{ij[ks]}^n = 2\Lambda_{i\ell}^n \Lambda_{j[k}^v \Lambda_{|v|s]}^\ell + 2\Lambda_{\ell j}^n \Lambda_{i[k}^v N_{|v|s]}^\ell + \Lambda_{i\ell}^n R_{jks}^\ell +$$
$$+\Lambda_{\ell j}^n R_{iks}^\ell - \Lambda_{ij}^n (R_{0ks}^0 + R_{nks}^n) + \Lambda_{ij\ell}^n R_{0ks}^\ell, \; \Lambda_{[ks]} = \Lambda_\ell R_{0ks}^\ell - m(R_{0ks}^0 +$$
$$+R_{nks}^n) + 2R_{\ell ks}^\ell - 4\Lambda_{v[k}^\ell \Lambda_{s]\ell}^v, \; 2b_{uv[st]}^n = -2b_{wv}^n \Lambda_{\ell[s}^w \Lambda_{|u|t]}^\ell -$$
$$-2b_{uw}^n \Lambda_{\ell[s}^w \Lambda_{|v|t]}^\ell + b_{uv\ell}^n R_{0st}^\ell + b_{wv}^n R_{ust}^w + b_{uw}^n R_{vst}^w - b_{uv}^n (R_{0st}^0 + R_{nst}^n),$$
$$2\Phi_{[ks]} = \Phi_t R_{0ks}^t - (n+1)(R_{0ks}^0 + R_{nks}^n).$$

В работе [1] (см. также [6]) нами показано, что:

а) регулярная гиперполоса $H_m \subset P_{n,n}$ кроме пространства $P_{m,n}$ в 3-й дифференциальной окрестности индуцирует второе пространство проективной связности $\bar{P}_{m,n}$, определяемое системой форм $\{\bar{\omega}_{\mathcal{J}}^{\bar{\mathcal{K}}}\}$:

8 Зак. 2305

$$\bar\omega_0^n = \omega_0^n = 0\,,\ \bar\omega_0^v = \omega_0^v = 0,\ \bar\omega_v^n = \omega_v^n = 0,\ \bar\omega_0^i = \omega_0^i,$$
$$\bar\omega_0^0 = \omega_0^0 - \tfrac{1}{n+1}\Phi_k\omega_0^k,\ \bar\omega_n^n = \omega_n^n - \tfrac{1}{n+1}\Phi_k\omega_0^k.$$
$$\bar\omega_n^0 = \omega_n^0,\ \bar\omega_n^i = -\Lambda_n^{ik}\omega_k^0,\ \bar\omega_i^0 = \Lambda_{ki}^n\omega_n^k,$$
$$\bar\omega_i^j = \omega_i^j + (\Lambda_n^{jk}\Lambda_{kis}^n - \delta_i^j\frac{\Phi_s}{n+1})\omega_0^s, \tag{3}$$
$$\bar\omega_i^n = -\Lambda_{ki}^n\omega_0^k,\ \ \bar\omega_i^v = -\Lambda_{ki}^n b_n^{vu}\omega_u^k,\ \bar\omega_n^v = -b_n^{vu}\omega_u^0,$$
$$\bar\omega_v^0 = b_{uv}^n\omega_n^u,\ \ \bar\omega_v^i = -b_{uv}^n\Lambda_n^{ik}\omega_k^u,$$
$$\bar\omega_v^w = \omega_v^w + (b_n^{wu}b_{uvs}^n - \tfrac{1}{n+1}\delta_v^w\Phi_s)\omega_0^s;$$

следовательно, система форм $\{\bar\omega_{\bar J}^{\bar K}\}$ удовлетворяет структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\bar\omega_{\bar J}^{\bar K} = \bar\omega_{\bar J}^{\bar L}\wedge\bar\omega_{\bar L}^{\bar K} + \tfrac12\bar R_{\bar J st}^{\bar K}\,\bar\omega_0^s\wedge\bar\omega_0^t,\ \ \bar\omega_{\bar L}^{\bar L} = 0;$$

б) преобразование $\mathfrak{J}:\omega_{\bar J}^{\bar K}\to\bar\omega_{\bar J}^{\bar K}$ форм проективной связности по закону (3) является инволютивным: $\mathfrak{J}\equiv\mathfrak{J}^{-1}$. Следовательно, пространства $P_{m,n}$ и $\bar P_{m,n}$ являются двойственными по отношению друг к другу. причем эти пространства могут быть плоскими лишь одновременно: $\{R_{\bar J st}^{\bar K}\equiv 0\}\Leftrightarrow\{\bar R_{\bar J st}^{\bar K}\equiv 0\}$; при этом формы $\omega_{\bar J}^{\bar K}$ являются формами инфинитезимального перемещения точечного репера первого порядка $\{A_{\bar J}\}$, а формы $\bar\omega_{\bar J}^{\bar K}$ – формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\xi_{\bar J}\}$, где

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Phi}}[A_0A_1\dots A_{n-1}],\ \ \xi_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Phi}}[A_nA_1\dots A_{n-1}],$$
$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Phi}}\sum_{j=1}^{m}\Lambda_{ji}^n\,[A_0A_1\dots A_{j-1}A_nA_{j+1}\dots A_mA_{m+1}\dots A_{n-1}], \tag{4}$$
$$\xi_v = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Phi}}\sum_{u=m+1}^{n-1} b_{uv}^n\,[A_0A_1\dots A_mA_{m+1}\dots A_{u-1}A_nA_{u+1}\dots A_{n-1}];$$

в) во 2- й дифференциальной окрестности элемента гиперполосы H_m индуцируется двойственный образ $\bar H_m$, определяемый уравнениями (относительно тангенциального репера $\{\xi_{\bar J}\}$, см. (4)):

$$\begin{cases}\bar\omega_n^n = \bar\omega_0^v = \bar\omega_v^n = 0, & \bar\omega_i^n = \bar\Lambda_{ij}^n\bar\omega_0^j,\\ \bar\omega_i^v = \bar\Lambda_{ij}^v\bar\omega_0^j, & \bar\omega_v^i = \bar\Lambda_{vj}^i\bar\omega_0^j,\end{cases} \tag{5}$$

где

$$\bar\Lambda_{ij}^n = -\Lambda_{ji}^n,\ \ \bar\Lambda_{ij}^v = -\Lambda_{ki}^n b_n^{vu}\Lambda_{uj}^k,\ \ \bar\Lambda_{vj}^i = -b_{uv}^n\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kj}^u.$$

2. Говорят, что гиперполоса $H_m\subset P_{n,n}$ оснащена в смысле Э.Картана [7], если в указанном смысле оснащена ее базисная поверхность V_m, т.е. каждой точке $A_0\in V_m$ поставлена в соответствие плоскость $N_{n-m-1}(A_0)$, не имеющая общих точек с касательной плоскостью $T_m(A_0)$ к поверхности V_m.

$(n-m-2)$ -мерная плоскость $[M_v]$, лежащая в характеристике $\Pi_{n-m-1}(A_0)$ главной касательной гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$, называется осью Кенигса, если в качестве M_v взяты точки $M_v = a_v^0A_0 + A_v$, a_v^0 – квазитензор 2-го порядка [5]. Если оснащающая плоскость $N_{n-m-1}(A_0)$ проходит через ось Кенигса, т.е.

$$N_{n-m-1}(A_0)\equiv[M_n(\nu), M_v],\ \ M_n(\nu) = \nu_n^0A_0 + N_n(\nu),$$
$$N_n(\nu) = A_n + \nu_n^iA_i + a_n^vA_v,$$

a_n^v – квазитензор 2-го порядка, то оснащение гиперполосы $H_m\subset P_{n,n}$ в смысле Э.Картана равносильно заданию на H_m полей геометрических объектов $\{\nu_n^i\}$, $\{\nu_n^i, a_n^v, \nu_n^0\}$:

$$\begin{cases}\nabla\nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nk}^i\omega_0^k,\\ \nabla\nu_n^0 + \nu_n^k\omega_k^0 + a_n^v\omega_v^0 + \omega_n^0 = \nu_{nk}^0\omega_0^k.\end{cases} \tag{6}$$

Говорят, что гиперполоса $H_m\subset P_{n,n}$ оснащена в смысле Э.Бортолотти [8], если ее базисная поверхность V_m оснащена в указанном смысле, т.е. каждой точке $A_0\in V_m$ поставлена в соответствие гиперплоскость $N_{n-1}(A_0)$, не содержащая A_0.

Инвариантную оснащающую плоскость $N_{n-1}(A_0)$ ищем в пучке, определяемом гиперплоскостями ξ_0 и η_n, где гиперплоскость η_n есть образ, двойственный точке N_n:

$$\eta_n = \xi_n - \Lambda_n^{ij}\nu_j^0\xi_i + b_n^{vu}a_u^0\xi_v.$$

Следовательно, выражение оснащающей плоскости $N_{n-1}(A_0)$ имеет вид:

$$\xi_n - \Lambda_n^{ij}\nu_j^0\xi_i + b_n^{uv}a_v^0\xi_u + \nu_n^0\xi_0. \tag{7}$$

Компоненты объектов $\{\nu_i^0\}$, $\{\nu_n^0, \nu_i^0, a_v^0\}$, определяющих плоскость $N_{n-1}(A_0)$, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases}\nabla\nu_i^0 + \omega_i^0 = \nu_{ik}^0\omega_0^k,\\ \nabla\nu_n^0 + a_u^0\omega_n^u - \nu_k^0\omega_n^k + \omega_n^0 = \nu_{nk}^0\omega_0^k.\end{cases} \tag{8}$$

Если обозначить

$$\bar\nu_n^i \overset{def}{=\!=} -\Lambda_n^{is}\nu_s^0,\ \ \bar\nu_n^0 \overset{def}{=\!=} \nu_n^0, \tag{9}$$

то система уравнений (8) в силу (3) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} d\bar{\nu}_n^i + \bar{\nu}_n^s \bar{\omega}_s^i - \bar{\nu}_n^i \bar{\omega}_n^n + \bar{\omega}_n^i = \bar{\nu}_{nk}^i \bar{\omega}_0^k, \\ d\bar{\nu}_n^0 + \bar{\nu}_n^0 (\bar{\omega}_0^0 - \bar{\omega}_n^n) + \bar{\nu}_n^s \bar{\omega}_s^0 + \bar{a}_n^v \bar{\omega}_v^0 + \bar{\omega}_n^0 = \bar{\nu}_{nk}^0 \bar{\omega}_0^k, \end{cases} \tag{10}$$

где $\bar{a}_n^v = b_n^{vu} a_u^0$, $\bar{\nu}_{nk}^i = -\Lambda_n^{is} \nu_{sk}^0$, $\bar{\nu}_{nk}^0 = \nu_{nk}^0$.

Сравнивая уравнения (6) и (10), имеем следующее предложение.

Т е о р е м а. Оснащение в смысле Э.Бортолотти гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ полем гиперплоскостей (7) равносильно оснащению в смысле Э.Картана ее двойственного образа $\bar{H}_m$ полем плоскостей $\bar{N}_{n-m-1}(\bar{\nu})$ с осью Кенигса, определяемым полями объектов (9).

Библиографический список

1. С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярной гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1988. Вып.19. С.88-93.

2. К а р т а н Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. 210 с.

3. Cartan E. Leçons sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937.

4. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1950. Вып.8. С.197-272.

5. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

6. С т о л я р о в А.В. Двойственные нормальные связности на регулярной гиперполосе / Чувашский пед. ин-т. 28 с. Деп. в ВИНИТИ 10.11.87. № 8231-В87.

7. Cartan E. Les éspaces á connexion projective // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1937. Вып.4. С.147-159.

8. Bortolotti E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi; applicazione alla geometria di rette // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933. V.3. P. 81-89.

УДК 514.75

О ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ

В.П.Т о л с т о п я т о в

(Свердловский педагогический институт)

В работе изучаются векторные поля постоянной длины на гладкой поверхности евклидова пространства.

1. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задана p-поверхность V_p. Присоединим к ней подвижной репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где векторы $\vec{e}_i$ $(i=1,\dots,p)$ принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha=p+1,\dots,n)$ образуют базис нормального пространства $N_x(V_p)$. Имеем

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^j \vec{e}_j + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \tag{1}$$

При этом внешние формы, участвующие в формулах (I), удовлетворяют известным уравнениям структуры пространства E_n.

Пусть $\vec{\xi} = \xi^i \vec{e}_i$ - векторное поле на гладкой поверхности. Имеем

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = \mu_k^i \omega^k. \tag{2}$$

Ковариантные производные координат векторного поля

$$\mu_i^k = \nabla_{\vec{e}_i} \xi^k \tag{3}$$

образуют поле аффинора на поверхности V_p. Дифференцируя (2) внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$d\mu_i^k = \mu_t^k \omega_i^t - \mu_i^t \omega_t^k + \vec{b}_{il} \vec{b}_{sj} \xi^l \gamma^{sk} \omega^j - \mu_{ij}^k \omega^j. \tag{4}$$

Таким образом, вместе с векторным полем на поверхности определяется поле тензора μ_{ij}^k, симметричного по нижним индексам. Имеем на поверхности V_p отображение направлений

$$\mu: T_x(V_p) \to T_x(V_p), \quad \mu(\vec{t}) = \mu_{ij}^k t^i t^j \vec{e}_k.$$

2. Векторное поле $\vec{\xi}$ имеет постоянную длину тогда и только тогда, когда $\vec{\xi} \cdot d\vec{\xi} = 0$ или

$$\xi^l \vec{e}_l (\mu_i^k \vec{e}_k + b_{ij}^\alpha \xi^j \vec{e}_\alpha) = 0.$$

Имеем