ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 9 1978

УДК 513.73

В.Н. Величкин

СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ОСНАЩЕНИЯМИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ V_{n-1} В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_n

В настоящей статье рассматриваются специальные оснащения гиперповерхности V_{n-1} в евклидовом пространстве E_n, индуцирующие на ней различные аффинные связности: эвиаффинную, вейлеву, риманову. Найдены необходимые и достаточные условия на выбор таких оснащений.

П° 1. Пусть задана гиперповерхность V_{n-1} в евклидовом пространстве E_n. Присоединим к ней подвижной репер первого порядка $\mathcal{R}=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_n\}$ $(i,j,k=1,\dots,n-1)$, где $x\in V_{n-1}$, $\vec{e}_i$ – единичные векторы, лежащие в касательной плоскости T_x, $\vec{e}_n$ – единичный вектор нормали к поверхности V_{n-1} в точке x. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x}&=\omega^i\vec{e}_i,\\ d\vec{e}_i&=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^n\vec{e}_n,\\ d\vec{e}_n&=\omega_n^i\vec{e}_i+\omega_n^n\vec{e}_n. \end{aligned}\tag{1}$$

При этом компоненты метрического тензора поверхности V_{n-1} $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$ подчиняются соотношению:

$$d\gamma_{ij}=\gamma_{ik}\,\omega_j^k+\gamma_{jk}\,\omega_i^k,\tag{2}$$

а формы ω^i, ω_j^i удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства.

Пусть

$$\vec{e}=\xi^i\vec{e}_i+\vec{e}_n\tag{3}$$

другое оснащение поверхности V_{n-1}. Здесь ξ^i достаточное число раз дифференцируемые функции переменных $u^1,\dots,u^{n-1}$ – параметров точки поверхности.

Присоединим к поверхности V_{n-1} еще один подвижной репер $\bar{\mathcal{R}}=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}\}$. Пусть деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x}&=\omega^i\vec{e}_i,\\ d\vec{e}_i&=\bar{\omega}_i^j\vec{e}_j+\bar{\omega}_i^n\vec{e},\\ d\vec{e}&=\bar{\omega}_n^j\vec{e}_j+\bar{\omega}_n^n\vec{e}. \end{aligned}\tag{4}$$

Подставляя в формулы (4) выражение (3) и результат его дифференцирования и сравнивая полученные выражения с формулами (1), получим формулы связи реперов $\mathcal{R}$ и $\bar{\mathcal{R}}$:

$$\bar{\omega}_j^i=\omega_j^i-\xi^i\omega_j^n,\tag{5}$$

$$\bar{\omega}_i^n=\omega_i^n,\tag{6}$$

$$\bar{\omega}_n^i=d\xi^i+\xi^j\omega_j^i+\omega_n^i-\xi^i\xi^j\omega_j^n,\tag{7}$$

$$\bar{\omega}_n^n=\xi^i\omega_i^n.\tag{8}$$

П° 2. Необходимо, чтобы оснащение (псевдонормаль) (3) было инвариантно связано с поверхностью V_{n-1}. Для этого надо, чтобы векторное поле

$$\vec{p}=\xi^i\vec{e}_i\tag{9}$$

также было инвариантно связано с нашей поверхностью. Из формул (1) имеем:

$$d\vec{p}=(d\xi^i+\xi^j\omega_j^i)\vec{e}_i+\xi^i\omega_i^n\vec{e}_n.\tag{10}$$

Для инвариантности потребуем, чтобы дифференцирование по вторичным параметрам давало нуль:

$$\delta\vec{p}=(\delta\xi^i+\xi^j\pi_j^i)\vec{e}_i=0.\tag{11}$$

Здесь учтено, что формы ω_i^n главные, так как

$$\omega_i^n=b_{ij}\,\omega^j,\quad b_{ij}=b_{ji}.\tag{12}$$

Из (11) следует, что справедливы разложения:

$$d\xi^i+\xi^j\omega_j^i=x_k^i\,\omega^k.\tag{13}$$

Продифференцировав внешним образом выражение (13), используя уравнения структуры и сами разложения (13), мы получим:

$$(dx_k^i-x_j^i\omega_k^j+x_k^j\omega_j^i-\xi^j\omega_n^i b_{jk})\wedge\omega^k=0.\tag{14}$$

Из (14) по лемме Картана получаем:

$$dx_k^i-x_j^i\omega_k^j+x_k^j\omega_j^i+\xi^j\gamma^{il}\omega_l^n b_{jk}=x_{kj}^i\omega^j,\tag{15}$$

причем $$x^i_{kj} = x^i_{jk}\,. \qquad (16)$$

Переходя в (15) к дифференцированию по вторичным параметрам и учитывая, что ω^n_ℓ главные формы, получим:

$$\delta x^i_k - x^i_j \pi^j_k + x^j_k \pi^i_j = 0\,. \qquad (17)$$

Здесь использованы разложения (12) и

$$\omega^i_n + \gamma^{ij}\omega^n_j = 0\,. \qquad (18)$$

Отсюда по критерию Г.Ф.Лаптева [1] заключаем, что x^i_k есть тензор типа аффинора.

П^0 3. Найдем условия, при которых связность, индуцируемая оснащением (3), является эквиаффинной.

Известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы связность была эквиаффинной, является [2]

$$\mathcal{D}\overline{\omega}^i_i = 0\,. \qquad (19)$$

(здесь сумма по $i = 1,\dots, n-1$). Используя формулу (5), получаем:

$$\mathcal{D}\overline{\omega}^i_i = \mathcal{D}\omega^i_i - \mathcal{D}(\xi^i\omega^n_i)\,. \qquad (20)$$

Но

$$\mathcal{D}\omega^i_i = 0\,, \qquad (21)$$

так как связность, индуцированная метрической нормалью, является эквиаффинной. Таким образом, условие (19) принимает вид:

$$(d\xi^k + \xi^i\omega^k_i)\wedge(b_{kj}\omega^j) = x^k_\ell b_{kj}\,\omega^\ell\wedge\omega^j = 0\,. \qquad (22)$$

Здесь использованы разложения (13).

Итак,

$$x^k_{[\ell}\, b_{j]k} = 0 \qquad (23)$$

есть условие на выбор оснащения (3), при котором оно индуцирует на поверхности V_{n-1} эквиаффинную связность.

П^0 4. Найдем условия, при которых связность, индуцируемая оснащением (3), является вейлевой с основным тензором b_{ij}, определяемым условиями (12).

Известно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы связность была вейлевой с основным тензором b_{ij}, является [2]

$$\overline{\nabla} b_{ij} = \theta\, b_{ij}\,, \qquad (24)$$

где

$$\overline{\nabla} b_{ij} = d b_{ij} - b_{kj}\overline{\omega}^k_i - b_{ik}\overline{\omega}^k_j\,, \qquad (25)$$

θ – дополнительный ковектор связности Вейля.

Из формулы перехода (5) с учетом соотношений (12), (18) получим следующее выражение для $\overline{\nabla} b_{ij}$:

$$\overline{\nabla} b_{ij} = \nabla b_{ij} + \xi^k(b_{kj}b_{i\ell} + b_{ik}b_{j\ell})\,\omega^\ell\,. \qquad (26)$$

С другой стороны, известно, что в результате продолжения уравнений (12) и применения леммы Картана мы получим соотношение

$$d b_{ij} - b_{kj}\omega^k_i - b_{ik}\omega^k_j + b_{ij}\omega^n_n = b_{ijk}\,\omega^k\,, \qquad (27)$$

причем b_{ijk} - тензор (проверяется по критерию Г.Ф. Лаптева [1]) симметрический по всем своим индексам. Но в силу выбора вектора $\vec{e}_n$ репера $\mathcal{R}$ имеем $\omega^n_n = 0$, и потому

$$\nabla b_{ij} = b_{ijk}\,\omega^k\,, \qquad (28)$$

и, таким образом, формула (26) принимает вид:

$$\overline{\nabla} b_{ij} = [b_{ij\ell} + \xi^k(b_{kj}b_{i\ell} + b_{ik}b_{j\ell})]\,\omega^\ell\,, \qquad (29)$$

а условие (24) вид:

$$[b_{ij\ell} + \xi^k(b_{kj}b_{i\ell} + b_{ik}b_{j\ell})]\,\omega^\ell = \theta\, b_{ij} \qquad (30)$$

Пусть

$$\theta = v_\ell\,\omega^\ell \qquad (31)$$

Тогда из (30) в силу линейной независимости форм ω^ℓ получим

$$b_{ij\ell} + \xi^k(b_{kj}b_{i\ell} + b_{ik}b_{j\ell}) = v_\ell\, b_{ij}\,. \qquad (32)$$

Так как тензор b_{ij} мы приняли за основной тензор связности Вейля, то существует взаимный тензор b^{ij}; свертывая с ним выражение (32), получим

$$v_\ell = \frac{1}{n-1}\, b^{ij} b_{ij\ell} + \frac{2\xi^k}{n-1}\, b_{k\ell}\,. \qquad (33)$$

П^0 5. Предположим, что помимо условия вейлевости (24) для оснащения (3) выполняется условие эквиаффинности (23). Эквиаффинная вейлева связность есть риманова связность [2]. Известно, что для римановой связности путем перенормирования основного тензора (в нашем случае b_{ij}) можно достичь того, чтобы $\theta = 0$, и значит $v_\ell = 0$. Предполагая, что такая перенормировка произведена, из (33) получим

$$2\xi^{\kappa} b_{\kappa\ell} + b^{ij} b_{ij\ell} = 0. \qquad (34)$$

Наконец, свернув (34) с $b^{\kappa\ell}$, получим

$$\xi^{\kappa} = \frac{1}{2(n-1)} b^{ij} b^{\kappa\ell} b_{ij\ell}. \qquad (35)$$

Формула (35) показывает, как выбрать псевдонормаль (3) так, чтобы получить на поверхности $V_{n-1} \subset E_n$ риманову связность с основным тензором b_{ij}.

Список литературы

I.Л а п т е в Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.мат.о-ва," 1963, т.2, с.275-382.

2.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.Изд. 2-е испр.М., "Наука", 1976, с.432.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Л.Г.К о р с а к о в а

ПАРЫ $\mathcal{D}$

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются пары $\mathcal{D}$ конгруэнций коник C_1 и C_2, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей, причем коники C_1 и C_2 имеют две общие точки пересечения с прямой ℓ. Исследуется пара $\mathcal{D}$, все коники которой инцидентны одной квадрике- пара $\mathcal{D}^{Q}$.

§ I. Пары $\mathcal{D}^{Q}$ конгруэнций коник, инцидентных инвариантной квадрике

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1, C_2) [1] конгруэнций коник C_1 и C_2, не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2, описывающих двупараметрические семейства. Отнесем пару (C_1, C_2) к реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где вершина A_i $(i,j,\kappa = 1,2;\ i \neq j$, по индексам i,j не суммировать) репера R -одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ. Вершины A_{i+2} являются полюсами прямой ℓ относительно коники C_i соответственно. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$d A_{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\beta} A_{\beta} \quad (\alpha, \beta, \eta = 1, 2, 3, 4),$$

где линейные дифференциальные формы ω_{α}^{β} удовлетворяют