УДК 512.7

О ВЫЧЕТАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ В РАСШИРЕНИИ ПОЛЯ КОНСТАНТ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

С.И.А л е ш н и к о в

(*Калининградский государственный университет*)

Вычеты дифференциалов алгебраической кривой играют фундаментальную роль в построении геометрических кодов Гоппы [1], [2]. При этом используются вычеты в рациональных точках кривой. Расширение поля констант увеличивает число рациональных точек, что позволяет получать более длинные коды, имеющие лучшие свойства. При этом возникает вопрос о соотношениях между вычетами в точках данной кривой и в рациональных точках кривой, полученной расширением поля констант. С точки зрения приложений наиболее интересен случай расширения Галуа поля констант. Этот случай возникает, в частности, когда поле констант $K = F_q$ есть конечное поле из q элементов, а его расширение $K' = F_{q^m}$ - расширение степени m поля F_q. В [3] получено соотношение между вычетами диффе-ренциалов на алгебраических кривых C и C' в случае отображения $\phi: C \to C'$, приводящего к сепарабельному расширению $K(C)$ поля рациональных функций $K(C')$ кривой C'. При этом поле констант K алгебраически замкнуто. В настоящей работе приведено простое доказательство аналогичного соотношения в случае расширения Галуа поля констант K алгебраической кривой C.

Обозначим $F = K(C)$ поле рациональных функций неособой проективной алгебраической кривой C над совершенным полем констант K. Пусть P - точка кривой C степени $\deg P = n$, O_P - локальное кольцо кривой C в P, v_P - дискретное нормирование поля F, отвечающее P, t - локальный параметр точки P, F_P - поле классов вычетов P, $F' = F \cdot F_P$- расширение поля констант функционального поля F / K при помощи F_P, $\hat{F}_P$ есть P-адическое пополнение поля F. Будем отождествлять P с максимальным идеалом кольца O_P и называть точкой поля F.

1. Пусть Q - точка поля F', лежащая над P. Элементарно проверяется, что поле классов вычетов $F'_Q = F_P$ и, следовательно, относительная степень расширения есть $f(Q / P) = 1$. Из равенства $f(Q / P) \cdot \deg P = \deg Q \cdot [F_P{:}K]$ получаем, что тогда выполняется $\deg P = \deg Q \cdot \deg P$, откуда $\deg Q = 1$. Так как расширение F'/F неразветвлено, то конорма точки P в расширении F'/F имеет вид

$$Con_{F'/F}(P) = Q_1 + ... + Q_n,$$

где $Q_1,....Q_n$ - все точки поля F', лежащие над P. Ясно что t является локальным параметром каждой точки Q_i.

2. Л е м м а. Пусть $\sigma: F \to F$ есть автоморфизм, такой что $\sigma(K) = K$. Тогда

1) $\sigma(P)$ - точка поля F/K и $\sigma(P)$ - её локальный параметр.

2) $\sigma(O_P) = O_{\sigma(P)}$ и $\sigma(O_P^*) = O_{\sigma(P)}^*$.

3) $v_{\sigma(P)}(\sigma(z)) = v_P(z)$ для любого $z \in F$.

4) $\deg \sigma(P) = \deg P.$

Доказательство леммы элементарно.

3. Обозначим $\hat{v}_P$ - продолжение нормирования v_P на поле $\hat{F}_P$, а также сужение $\hat{v}_P$ на $F' = F \cdot F_P$, содержащееся в $\hat{F}_P$. Так как $F_P^* \subset O_{\hat{P}} = \{z \in \hat{F}_P : \hat{v}_P(z) \geq 0\}$, то $\hat{v}_P$ - дискретное нормирование поля F'/F$_P$ и, следовательно, множество $Q = \{z \in F' : \hat{v}_P(z) > 0\}$ есть точка поля F', лежащая над P. Тогда нормирование $\hat{v}_P$ поля F' совпадает с нормированием v_Q.

4. Предположим, что F_P / K - конечное расширение Галуа с группой Галуа $G = Gal(F_P / K) = \{\sigma = \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$. Тогда, как известно [2], F'/F - расширение Галуа степени n, группа Галуа $Gal(F'/F)$ изоморфна группе $G = Gal(F_P / K)$, группа G действует транзитивно на множестве расширений Q_i точки P в поле F', так что можно считать, что $Q_i = \sigma_i(Q)$ для $1 \leq i \leq n$.

5. Л е м м а. Пусть в условиях леммы 2 выполняется $\deg P = 1$. Тогда для любого $z \in F$ имеет место равенство:

$$\sigma(\mathrm{Re}s_{P,t}(z)) = \mathrm{Re}s_{\sigma(P),\sigma(t)}(\sigma(z)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z = \sum_{i=m}^{\infty} a_i \cdot t^i$ есть P-адическое разложение элемента $z \in F$. Имеем $v_{\sigma(P)}(\sigma(z) - \sum_{i=m}^{k} \sigma(a_i) \cdot \sigma(t)^i) =$

$= v_{\sigma(P)}(\sigma(z - \sum_{i=m}^{k} a_i \cdot t^i)) = v_P(z - \sum_{i=m}^{k} a_i \cdot t^i) \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$. Это означает, что $\sigma(z) = \sum_{i=m}^{\infty} \sigma(a_i) \cdot \sigma(t)^i$ есть $\sigma(P)$-адическое разложение элемента $\sigma(z)$. Отсюда следует, что выполняются равенства $\mathrm{Re}s_{P,t}(z) = a_{-1}$ и, соответственно, $\mathrm{Re}s_{\sigma(P),\sigma(t)}(\sigma(z)) = \sigma(a_{-1}) = \sigma(\mathrm{Re}s_{P,t}(z)).$

6. П р е д л о ж е н и е. В условиях п. 4 для любого $z \in F$ выполняется

$$\mathrm{Res}_{P,t}(z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_{Q_i,t}(z).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z=\sum_{i=m}^{\infty}a_i\cdot t^i$ есть Q - адическое разложение элемента z в поле F', где $a_i\in F_P$. При этом имеем $\mathrm{Res}_{Q,t}(z)=a_{-1}$. Так как $v_Q=\hat{v}_P$, то разложение $z=\sum_{i=m}^{\infty}a_i\cdot t^i$ явля-ется также P - адическим разложением элемента z в поле $\hat{F}_P$ и, значит, $\mathrm{Res}_{P,t}(z)=Tr_P(a_{-1})$, где $Tr_P\colon F_P\to K$ есть отображение следа. Учитывая, что $z,t\in F$, для $\sigma\in F$ по лемме 5 получаем

$$\mathrm{Res}_{\sigma(Q),t}(z)=\sigma(\mathrm{Res}_{Q,t}(z))=\sigma(a_{-1})$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_{Q_i,t}(z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_{\sigma_i(Q),t}(z)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(a_{-1})=Tr_P(a_{-1})=\mathrm{Res}_{P,t}(z).$$

7. С л е д с т в и е. Пусть $z\in F$, $\omega=z\cdot dt$ - дифференциал поля F. Тогда

$$\mathrm{Res}_P(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}_{Q_i}(\omega).$$

8. С л е д с т в и е. Пусть $\omega=z\cdot dz$, ω_P - локальная компонента дифференциала ω в точке P, $u\in F$. Тогда

$$\omega_P(u)=\mathrm{Res}_P(u\cdot\omega).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $i_P\colon F\to A_F$ (соотв. $i_{Q_i}\colon F'\to A_{F'}$) - вложение поля F (соотв. F') в пространство аделей A_F (соотв. $A_{F'}$). Ясно, что при отождествлении A_F с подпространством в $A_{F'}$ вы-полняется $i_P(u)=\sum_{i=1}^{n}i_{Q_i}(u)$. При этом

$$\omega_P(u)=\omega(i_P)=\sum_{i=1}^{n}\omega(i_{Q_i}(u))=\sum_{i=1}^{n}\omega_{Q_i}(u).$$

Результат теперь следует из [2].

Библиографический список

1. *Tsfasman M.A., Vladut S.G.* Algebraic-Geometric Codes. Kluwer Academic Publishers, 1991. 667 p.

2. *Stichtenoth H.* Algebraic Function Fields and Codes. Springer-Ver-lag, 1993. 260 p.

3. *Serre J.-P.* Algebraic Groups and Class Fields. Springer-Verlag, 1988. 207 p.

S.I. Aleshnikov

ABOUT RESIDUES OF WEIL DIFFERENTIALS IN A CONSTANT FIELD EXTENSION OF AN ALGEBRAIC CURVE

In this work we consider the relation between the residues of a Weil differential ω on a non-singular projective algebraic curve C over a perfect constant field. Let P is a plase of curve C of degree n, F_P is the residue class field, which is a finite Galois extension of constant field K, $F = K(C)$ is the field of rational functions on C, $F' = F\cdot F_P$ is the constant field extension of field F by means of F_P. Then in F' there exist exactly n places Q_1, ..., Q_n lying over P. The degree of Q_i is one, for any i: $1 \le i \le n$. Moreover $\mathrm{Res}_P(\omega) = = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{Q_i}(\omega)$, and a local component ω_P of the Weil differential ω in P can be viewed as $\omega_P(u) = \mathrm{Res}_P(u\cdot\omega)$ for any $u \in F$, that gives a simple proof of the Residue Theorem.

УДК 512.7

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЛЯ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ ХОРОШЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КРИВЫХ

И.С.А л е ш н и к о в

(Университет Эссена)

В настоящей работе дается новое, более простое, доказательство того, что последовательность $X=(X_1, X_2, X_3, ...)$ проективных, неприводимых, невырожденных алгебраических кривых над полем $\mathbb{F}_{q^2}$, определяемых уравнениями: $x_{i+1}^{q} + x_{i+1} \cdot \frac{1}{x_i^{q-1}} = x_i$ для любого $i = \overline{1, n-1}$, является асимптотически хорошей.

Определение. Пусть $C=(C_1, C_2, C_3, ...)$ - последовательность проективных, неприводимых, невырожденных алгебраических кривых над полем $\mathbb{F}_s$, $N(C_i)$ - число рациональных точек, а $g(C_i)$ - род кривой C_i. Положим $\lambda(C)=\lim\limits_{i\to\infty}\frac{N(C_i)}{g(C_i)}$. Последовательность C называется асимптотически хорошей (соотв. асимптотически плохой), если $\lambda(C)>0$ (соотв. $\lambda(C)=0$).

Основным результатом является следующая