2. О с т и а н у Н.М., Поляков Н.Д, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. -В сб.: Проблемы геометрии. Т.11. ВИНИТИ АН СССР.М., 1980, с.3-64.

3. П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами.III. $N(\sigma)$-антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры.- В сб.: Проблемы геометрии, Т.13, ВИНИТИ АН СССР, М., 1982.

4. Yano Kentaro, Kon Masahiro, Anti-invariant submanifolds. Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 21, Marcel Dekker. New York-Basel, 1976, viii, 182 pp.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Е.В.С и л а е в

О СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе получены неравенства, которым удовлетворяет скалярная кривизна поверхности, лежащей на гиперсфере евклидова пространства E_n.

Пусть поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке O и радиусом r евклидова пространства E_n. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,\ldots=1,\ldots,p;\alpha,\beta,\ldots=p+1,\ldots,n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве T_x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в точке x.

Так как для любой точки x поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, вектор $\vec{x}$ принадлежит пространству N_x, то $\vec{x}=x^\alpha\vec{e}_\alpha$, где $\vec{x}=\vec{Ox}$, $\sum\limits_\alpha (x^\alpha)^2=r^2$. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,$$
$$d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,$$
$$d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.$$

При смещении точки x вдоль поверхности V_p имеем $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и применяя лемму Картана, получим $\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$, $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$.

Пусть $\vec{M}$ -вектор средней кривизны поверхности V_p [1] и $\vec{b}_{ij}=b_{ij}^\alpha\vec{e}_\alpha$.

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства E_n, то в подвижном ортонормированном репере скалярная кривизна R поверхности V_p удовлетворяет неравенству

$$\frac{p^2}{r^2}-\sum_{i,j}\vec{b}_{ij}^2 \le R \le (p\vec{M})^2-\frac{p}{r^2}.$$

Причем: 1/ $R=\frac{p^2}{r^2}-\sum_{i,j}\vec{b}_{ij}^2$ тогда и только тогда, когда $\forall x\in V_p$ средняя нормаль $(x,\vec{M})$ проходит через центр O гиперсферы $S_{n-1}(O,r)$ 2/ $R=(p\vec{M})^2-\frac{p}{r^2}$ тогда и только тогда, когда $\forall x\in V_p$ плоскость главной нормали $N_q(x)$ совпадает с прямой Ox.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для поверхности V_p, лежащей на гиперсфере евклидова пространства E_n, имеют место [5] равенства:

$$\sum_{\alpha} x^{\alpha} b_{ij}^{\alpha}+\gamma_{ij}=0, \qquad (1)$$

где $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$ -метрический тензор поверхности V_p.

Пусть векторы $\vec{e}_i$ образуют ортонормированный репер базис касательного пространства T_x в точке x, тогда $\gamma_{ij}=\delta_{ij}$, где δ_{ij} -символ Кронекера. Следовательно, $\vec{x}\cdot\vec{b}_{ij}+\delta_{ij}=0$. На основании неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$|\vec{x}\cdot\vec{b}_{ij}|\le|\vec{x}|\cdot|\vec{b}_{ij}|,$$

откуда следует, что

$$|\vec{b}_{ij}|\ge\frac{\delta_{ij}}{r}. \qquad (2)$$

Известно [2], что в подвижном ортонормированном репере скалярная кривизна R поверхности V_p в евклидовом пространстве E_n удовлетворяет условию:

$$(p\vec{M})^2=R+\sum_{i,j}\vec{b}_{ij}^2. \qquad (*)$$

Учитывая неравенства (2), получим

$$(p\vec{M})^2\ge R+\frac{1}{r^2}p.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{b}_{ij}\parallel\vec{x}$,

т.е. тогда и только тогда, когда плоскость главной нормали $N_q(x)=[x,\vec{b}_{ij}]$ поверхности V_p совпадает с прямой Ox, $\forall x\in V_p$. Можно доказать, что справедлива

Т е о р е м а. 1/ Средняя кривизна $|\vec{M}|$ поверхности $V_p\subset S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, как поверхности в E_n, не превосходит $\frac{1}{r}$. 2/ $\forall x\in V_p$ средняя нормаль $(x,\vec{M})$ проходит через неподвижную точку O тогда и только тогда, когда поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$ и имеет постоянную среднюю кривизну $|\vec{M}|=\frac{1}{r}$, как поверхность в E_n.

Следовательно, используя равенство (*), для скалярной кривизны R поверхности $V_p\subset S_{n-1}(O,r)\subset E_n$ имеем:

$$\frac{p^2}{r^2}\le R+\sum_{i,j}\vec{b}_{ij}^2.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда средняя нормаль $(x,\vec{M})$ проходит через центр O гиперсферы $S_{n-1}(O,r)$, $\forall x\in V_p$.

З а м е ч а н и е. 1. Пусть поверхность $V_p\subset S_{n-1}(O,r)\subset E_n$ несет сопряженную сеть, тогда в репере, построенном на касательных к линиям сопряженной сети, имеем: $b_{ij}^{\alpha}=0$ $(i\ne j)$ и по формуле (1) $\gamma_{ij}=0$ $(i\ne j)$.

Таким образом, сопряженная сеть на поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n, всегда является ортогональной [3].

З а м е ч а н и е 2. Покажем, что поверхность $V_p\subset S_{p+1}(O,r)\subset E_{p+2}$ всегда несет сопряженную ортогональную сеть.

Для такой поверхности имеются только две асимптотические формы $\Phi^{p+1}=b_{ij}^{p+1}\omega^i\omega^j$ и $\Phi^{p+2}=b_{ij}^{p+2}\omega^i\omega^j$.

Направим вектор $\vec{e}_{p+2}$ коллинеарно вектору $\vec{x}$, тогда $\vec{x}=r\vec{e}_{p+2}$. Формулы (1) в этом случае примут вид: $rb_{ij}^{p+2}+\gamma_{ij}=0$. Следовательно, $\Phi^{p+2}=-\frac{1}{r}\gamma_{ij}\omega^i\omega^j$. Известно [4], если из двух квадратичных форм Φ^{p+1} и $-\Phi^{p+2}$ одна $-\Phi^{p+2}$ является положительно определенной, то существует невырожденное линейное преобразование, одновременно приводящее эти формы к каноническому виду. Это же преобразование приведет к каноническому виду и пару форм

Φ^{p+1} и Φ^{p+2}.

Это значит, что на поверхности $\vartheta_p \subset S_{p+1}(0,r) \subset E_{p+2}$ всегда существует такое семейство реперов $\{x, \vec{e}_i\}$, направления векторов $\vec{e}_i$ которого попарно сопряжены. Таким образом, на такой поверхности всегда существует сопряженная сеть, которая по замечанию 1 будет ортогональной.

Из доказанной теоремы и замечаний вытекает

С л е д с т в и е. Если поверхность ϑ_p, принадлежащая гиперсфере $S_{n-1}(0,r)$ евклидова пространства E_n несет сопряженную сеть, то в подвижном репере, построенном на касательных к линиям этой сети, скалярная кривизна R поверхности ϑ_p удовлетворяет неравенству:

$$\frac{p^2}{r^2} - \sum_i \vec{b}^2_{ii} \leqslant R \leqslant (p\vec{M})^2 - \frac{p}{r^2}.$$

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сб., 1966, №4, с.475-492.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства.-Сибирск.матем.журнал, 1966, №3, с.499-511.

3. Г е й д е л ь м а н Р.М. Об одном свойстве квадратичных сопряженных сетей.-Изв.вузов. Матем., 1968, №11, с.48-50.

4. К у р о ш А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1971.

5. С и л а е в Е.В. О p-сопряженных системах на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12. Калининград, 1981, с.84-87.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Е.Н. С о с о в

ЗАМЕЧАНИЕ О РЕЛЯТИВНОЙ ЛИНЕЙЧАТОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой статье изучается геометрия множества ориентированных прямых аффинного пространства $\mathcal{D}_3$ методом, предложенным в статье [1]. Кратко напомним сущность этого метода. В аффинном пространстве $\mathcal{D}_{n+1}$ выбирается индикатриса $\mathcal{M}_n$: $\vec{a} = \vec{a}(x^1, \ldots, x^n)$. В качестве оснащающего берется радиус-вектор $\vec{a}$ точки $\mathcal{M}_n$, при этом возникают следующие деривационные уравнения:

$$\partial_i a_j = \Gamma^k_{ij} \vec{a}_k + b_{ij} \vec{a}, \quad (i,j,k = \overline{1,n}),$$

где связность Γ^k_{ij} эквипроективна. Элементы касательного расслоения индикатрисы $T(\mathcal{M}_n)$ отождествляются с ориентированными прямыми $\mathcal{D}_{n+1}$ следующим образом: точке $T(\mathcal{M}_n)$ с локальными индуцированными координатами (x^i, x^{n+i}) ставится в соответствие ориентированная прямая с направляющим вектором $\vec{a}$, проходящая через точку: $\vec{r}_0 = \vec{a} + x^{n+s} \vec{a}_s$. В $T(\mathcal{M}_n)$ существует аффинная связность $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,2n})$, инвариантная относительно преобразования $T(\mathcal{M}_n)$, индуцированных параллельными переносами в $\mathcal{D}_{n+1}$:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} = {}^c\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - T^\gamma_{\alpha\beta},$$

где ${}^c\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ - полный лифт связности Γ^k_{ij},

$$T^\gamma_{\alpha\beta} = B_{\alpha\sigma} \omega^\sigma f^\gamma_\beta + B_{\beta\sigma} \omega^\sigma f^\gamma_\alpha - B_{\alpha\sigma} f^\sigma_\beta \omega^\gamma -$$

тензор деформации. $B_{\beta\gamma}$ -полный лифт тензора b_{ij}, ω^α - векторное поле слоевой гомотетии, которые в локальных