УДК 514.75

И.Е. Волкова

(Балтийский военно-морской институт)

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГИПЕРПОЛОСЕ SH_m

Введены в рассмотрение цилиндрические распределения Δ на базисной поверхности гиперполосы SH_m [1]. Приведены аналитические признаки цилиндрических распределений Δ и Δ*. Доказано, что нормаль Фосса [2] сопряженной системы S(Δ, Δ*) цилиндрического типа совпадает с ее Δ-виртуальной аффинной нормалью [2].

В работе используется следующая схема индексов:
$p,q,t=\overline{1,r}$; $a,b,c=\overline{r+1,m}$; $i=\overline{1,m}$; $\alpha=\overline{m+1,n-1}$; $J,K,L=\overline{1,n}$.

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n со структурными уравнениями

$$D\omega^J=\omega^L\Lambda\omega_L^J,\ D\omega_J^K=\omega_J^L\Lambda\omega_L^K,$$

отнесенное к подвижному реперу $\{A,\vec{e}_J\}$. Инфинитезимальные перемещения этого репера определяются дифференциальными уравнениями

$$dA=\omega^J\vec{e}_J,\ d\vec{e}_J=\omega_J^K\vec{e}_K. \tag{1}$$

Известно [1], что гиперполоса SH_m, базисная поверхность которой несет двухкомпонентную сопряженную систему S(Δ, Δ*), определяется уравнениями (без соответствующих замыканий):

$$\begin{gathered}\omega_\alpha^n=0,\ \omega^\alpha=0,\ \omega^n=0,\ \omega_p^a=R_{pi}^a\omega^i,\ \omega_p^\alpha=\Lambda_{pq}^\alpha\omega^q,\ \omega_p^n=\Lambda_{pq}^n\omega^q,\\ \omega_a^n=\Lambda_{ab}^n\omega^b,\ \omega_a^\alpha=\Lambda_{ab}^\alpha\omega^b,\quad \omega_a^p=S_{ai}^p\omega^i,\ \omega_\alpha^a=l_{\alpha i}^a\omega^i,\ \omega_\alpha^p=l_{\alpha i}^p\omega^i.\end{gathered} \tag{2}$$

Определение. Распределение Δ на гиперполосе SH_m назовем *цилиндрическим*, если при смещении вдоль любой его интегральной кривой плоскость сопряженного ему распределения Δ* смещается параллельно себе.

В силу формул (1), (2) имеем

$$d\vec{e}_p\Big|_{\omega^p=0}=\omega_p^q\vec{e}_q+R_{pa}^b\omega^a\vec{e}_b; \tag{3}$$

$$d\vec{e}_a\big|_{\omega^a=0}=\omega_a^b\vec{e}_b+S_{ap}^q\omega^p\vec{e}_q. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что Δ-распределение является цилиндрическим распределением тогда и только тогда, когда тензор $\{S_{ap}^q\}$ обращается в нуль:

$$S_{ap}^q\equiv 0. \tag{5}$$

Аналогично в силу формулы (3) Δ^*-распределение является цилиндрическим тогда и только тогда, когда

$$R_{pa}^{b} \equiv 0. \tag{6}$$

Как показано в работе [3], распределение Δ^* ($\dim\Delta^*>1$) является коническим тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{R}_{pa}^{b} = R_{pa}^{b} - R_p \delta_a^b = 0. \tag{7}$$

Таким образом, всякое цилиндрическое распределение Δ^* можно рассматривать как коническое, для которого, как это следует из (7), тензор $\{R_p\}$ [2] обращается в нуль:

$$R_p \overset{def}{=} \frac{1}{s} R_{pa}^{a} = 0.$$

Аналогично получаем, что всякое цилиндрическое распределение Δ можно рассматривать как коническое, для которого тензор $\{S_a\}$ [2] обращается в нуль:

$$S_a \overset{def}{=} \frac{1}{r} S_{ap}^{p} = 0.$$

Следовательно, все свойства конических распределений [3] распространяются и на цилиндрические. В силу этого имеет место

Теорема 1. *Всякое цилиндрическое распределение голономно. Вдоль любой его интегральной поверхности плоскости сопряженного распределения описывают* ***цилиндры****.*

2. Цилиндрические распределения существуют на любой гиперполосе $SH_m \subset A_n$. Для доказательства этого утверждения достаточно предъявить пример. Рассечем базисную поверхность $V_m \subset SH_m$ семейством параллельных (s+1)-мерных плоскостей $\Pi_{s+1}(s = m - r)$. Каждая из них пересекает поверхность V_m по некоторой s-поверхности V_s. Касательные s-плоскости T_s таких поверхностей образуют голономное Δ^*-распределение. Так как при смещении вдоль любой интегральной кривой сопряженного ему распределения Δ плоскость распределения Δ^* не выходит из касательной плоскости T_m базисной поверхности $V_m \subset SH_m$ и при этом параллельна $\Pi_{s+1}(A)$, то плоскость Δ^* смещается параллельно себе. Таким образом, Δ – цилиндрическое распределение, которое в силу теоремы 1 голономно.

Определение. Сопряженную систему $S(\Delta,\Delta^*)$ на $V_m \subset SH_m$ назовем *системой цилиндрического типа*, если каждое из распределений Δ и Δ^* является *цилиндрическим*.

Так как всякое цилиндрическое распределение голономно, то сопряженная система цилиндрического типа – это двухкомпонентная голономная сопряженная система.

Теорема 2. *Нормаль Фосса Φ_{n-m} сопряженной системы $S(\Delta, \Delta^*)$ цилиндрического типа совпадает с Δ-виртуальной аффинной нормалью $\mathcal{A}_{n-m}$ гиперполосы SH_m.*

Пусть сопряженная система $S(\Delta,\Delta^*)$ на базисной поверхности V_m гиперполосы – цилиндрического типа, т.е. выполняются условия (5); (6). Δ-виртуальная аффинная нормаль $A_{n-m} = \left[A, \vec{e}_\alpha, \vec{A}_n\right]$ гиперполосы SH_m [2] натянута на характеристику $\left[A, \vec{e}_\alpha\right]$ и прямую $\left[A, \vec{A}_n\right]$, где

$$\vec{A}_n = \vec{e}_n + b_n^p \vec{e}_p + b_n^a \vec{e}_a + \Lambda_n^\alpha \vec{e}_\alpha, \tag{8}$$

а нормаль Фосса $\Phi_{n-m}(A) = \left[A, \vec{e}_\alpha, \vec{\Phi}_n\right]$, где

$$\vec{\Phi}_n = \vec{e}_n + S_n^p \vec{e}_p + R_n^a \vec{e}_a + \Lambda_n^\alpha \vec{e}_\alpha. \tag{9}$$

В силу конечных соотношений [1]

$$\Lambda_{qtb}^n = -\Lambda_{qp}^n S_{bt}^p - \Lambda_{cb}^n R_{qt}^c, \quad \Lambda_{abp}^n = -\Lambda_{ac}^n R_{pb}^c - \Lambda_{pq}^n S_{ab}^q$$

и с учетом (5); (6) получим

$$\Lambda_{qtb}^n = -\Lambda_{bc}^n R_{qt}^c, \; \Lambda_{caq}^n = -\Lambda_{qt}^n S_{ca}^t \;. \tag{10}$$

Согласно (10) имеем [2]:

$$\begin{aligned} b_n^a &= -\frac{1}{r}\Lambda_n^{qt}\Lambda_{qtb}^n\Lambda_n^{ba} = \frac{1}{r}\Lambda_n^{qt}\Lambda_{bc}^n R_{qt}^c\Lambda_n^{ba} = \frac{1}{r}\Lambda_n^{qt}R_{qt}^a \overset{def}{=} R_n^a; \\ b_n^p &= -\frac{1}{s}\Lambda_n^{ca}\Lambda_{caq}^n\Lambda_n^{qp} = \frac{1}{s}\Lambda_n^{ca}\Lambda_{qt}^n S_{ca}^t\Lambda_n^{qp} = \frac{1}{s}\Lambda_n^{ca}S_{ca}^p \overset{def}{=} S_n^p. \end{aligned} \tag{11}$$

Из соотношений (11), (8), (9) следует, что $\vec{A}_n = \vec{\Phi}_n \Leftrightarrow \Phi_{n-m}(A) \equiv \vec{A}_{n-m}(A)$.

Список литературы

1. *Лисицына И.Е.* Распределение на регулярной гиперполосе аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. №30. С.43 – 49.

2. *Лисицына И.Е.* Аффинные нормали гиперполосы SH_m // Там же, 2001. №32. С. 57 – 61.

3. *Волкова И.Е.* Плоские и конические распределения на гиперполосе SH_m // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2001. С. 5 – 8.

I. Volkova

CYLINDRICAL DISTRIBUTIONS ON THE HYPERSTRIP SH_m

Cylindrical distribution Δ are introduced on the basic surface of the hyperstrip SH_m. Analytical signs of cylindrical distribution Δ and Δ* are given. It is proved, that Foss` normal for the conjugate system S(Δ, Δ*) of cylindrical type coincidences with its Δ-virtual affine normal.