4. *Волкова С.Ю.* Двойственные аффинные и проективные связности S-распределения // ВИНИТИ РАН, 2001. №1871-В2001.

5. *Волкова С.Ю.* Нормализации Нордена-Чакмазяна, ассоциированные с регулярной гиперполосой $H_r(L)$ проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1996. №27. С. 24 – 33.

S.Volkova

DUAL IMAGE OF THE HYPERSTRIP $SH_r(L)$

Regular hyperstrips with composed characteristics are investigated. For such hyperstrips existence theorem is proved. It is shown, that in the second differential neighbourhood the projective space is induced, which is dual to initial one concerning involutory transformation, generated by the hyperstrip. Dual image for the equipped hyperstrip concerning this transformation is introduced.

УДК 514.7

А.И. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

КРИВЫЕ 3-МЕРНЫХ ВЕЙЛЕВСКИХ ОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И КРИВЫЕ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Реализована идея определения кривых 3-мерных разрешимых вейлевских одулярных пространств (ВО-пространств) на основе кривых евклидовой плоскости. По плоским евклидовым кривым постоянной кривизны найдены кривые постоянных кривизн одулярных пространств.

§ 1. Вейлевские одулярные пространства

1.1. Одули на многообразии R^3**.** Структура одуля $\Omega = (\Omega,+,\omega_{\mathrm{K}}(+))$ определена в [1] на структуре $(\Omega,+)$ посредством введения внешней операции $\omega_K(+)$ умножения элементов из $(\Omega,+)$ на скаляры из кольца K. Для всех $\omega \in \Omega$ и $t, s \in \mathrm{K}$ выполняются аксиомы одуля:

$$s(t\omega) = (st)\omega,\ (t+s)\omega = t\omega + s\omega .$$

Рассматриваем многообразие R^3 со структурой группы Ли, на котором задана групповая операция +, и определяем внешнюю операцию $\omega_R(+)$. Имеем одули $\Omega = (\Omega,+,\omega_R(+))$ на группах Ли $(\mathrm{R}^3,+)$. Внешние операции на всех 3-мерных некоммутативных разрешимых группах Ли определены автором. Имеются следующие разрешимые одули: *линейное пространство* L^3, *растран* P^3, *сибсон* Σ^3, *диссон* Δ^3, *осцилляторный одуль* Ω^3. Многообразие Sol, рассматриваемое в [2], после введения внешней операции оказалось растраном. Растран есть одуль на основной аффинной группе – группе переносов и гомотетий, сибсон – одуль движений галилеевой плоскости, осцилляторный одуль есть одуль движений евклидовой плоскости.

1.2. Дифференцирование одулярных функций. *Нормой* $\| \omega \|$ одуляра $\omega = (x, y, z)$ называется

$$\| \omega \| = | x |, \text{ если } x \neq 0; \ \| \omega \| = \sqrt{y^2 + z^2}, \text{ если } x = 0.$$

Эт о *галилеева* норма.

Рассматриваем одулярные функции $\omega(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$, $\omega(t) \in \Omega$. Считаем, что действительные функции $x(t), y(t), z(t)$ дифференцируемы на интервале I. Вычисляя предел отношения ${}^{\Delta\omega}\!/_{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, находим производные одулярных функций. Производная растранной функции $\omega'(t) = \rho'(t) = (x', (e^{x'} - 1)(\frac{y'}{x'} - y)$, $(e^{x'} - 1)(\frac{z'}{x'} - z))$, производная сибсонной функции $\omega'(t) = \sigma'(t) = (x', y', z' + x'(\frac{1}{2} y' - y))$ (см. [3]), $\omega'(t) = \delta' = \left(x', \left(e^{x'} - 1\right)\left(\frac{y' - z'}{x'} - y \right) + \left(z' - zx'\right)e^{x'}, \left(e^{x'} - 1\right)\left(\frac{z'}{x'} - z \right) \right)$ для диссонной функции. Функции в осцилляторном одуле недифференцируемы [4].

1.3. ВО-пространства. Заменяя линейное пространство одулем в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, получаем ВО-пространства – вейлевские одулярные пространства [5], частный случай одулярных пространств Л.В. Сабинина [1]. Простейшим из ВО-пространств является аффинное пространство. ВО-пространство с растраном называется *ЕМ-пространством*, ВО-пространство с сибсоном называется *ЕС-пространством*, ВО-пространство с диссоном называется *ЕД-пространством*.

Всякий одуляр $\omega = (x, y, z)$ всех одулей разлагается в сумму $\omega = x\alpha + y\beta + z\gamma$, где $(1,0,0) = \alpha$; $(0,1,0) = \beta$; $(0,0,1) = \gamma$. Подоодуль $\langle \beta, \gamma \rangle$, порожденный одулярами β, γ, является евклидовым векторным пространством. Плоскость $\mathrm{E}^2 = \langle P, \beta, \gamma \rangle$, проходящая через точку P и имеющая своим одулем $\langle \beta, \gamma \rangle$, есть евклидова плоскость каждого из ВО-пространств.

§ 2. Кривые ВО-пространств

2.1. Регулярные кривые. Одулярная функция $\omega(t)$ класса C^3 задает кривую $\omega(t) = (u(t), v(t), w(t))$, $t \in \mathrm{I}$, класса C^3 ВО-пространства. Положив $u(t) = s$, получаем кривую в естественной параметризации $\omega(s) = (s, x(s), y(s))$, $s \in \mathrm{I}$, считаем, что интервал I есть окрестность обыкновенной точки P кривой $\omega(s)$. Рассматриваем кривые, касательные одуляры которых отличны от векторов. Дифференцирование одулярных функций задает касательное отображение ВО-пространства в одуль. Касательные одуляры кривых, заданных в естественной параметризации, вычисляются по формулам дифференцирования одулярных функций из п. 1.2. В ЕМ-пространстве $\tau\ =\dot{\omega}(s)=\dot{\rho}(s)=(1,(e-1)(\dot{x}-x),(e-1)(\dot{y}-y))$, в ЕС-пространстве $\tau=\dot{\omega}(s)=\dot{\sigma}=(1,\dot{x},\dot{y}+\frac{1}{2}\dot{x}-x)$, в ЕД-пространстве $\tau=\dot{\omega}(s)=\dot{\delta}=(1,(e-1)(\dot{x}-\dot{y}-x)+$ $+e(\dot{y}-y),(e-1)(\dot{y}-y))$. Это единичные одуляры касательных. Функции $\dot{\omega}(s)$ уже дифференцируются как векторные:

$$\dot{\tau}=\ddot{\rho}(s)=(0,(e-1)(\ddot{x}-\dot{x}),(e-1)(\ddot{y}-\dot{y}))=(e-1)(0,(\ddot{x}-\dot{x}),(\ddot{y}-\dot{y})),$$

$$\dot{\tau}=\ddot{\sigma}=(0,\ddot{x},\ddot{y}-\dot{x}+\frac{1}{2}\ddot{x}),\ \dot{\tau}=\ddot{\delta}=\ (e-1)(0,\ddot{x}-\dot{x}+\frac{1}{e-1}(\ddot{y}-e\dot{y}),\ddot{y}-\dot{y}).$$

2.2. Кривизны. Для кривых ЕМ- и ЕД-пространств положим $\dot{\tau}=(e-1)k_1\vec{n}$, для кривой ЕС-пространства $\dot{\tau}=k_1\vec{n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор главной нормали кривой, k_1 – кривизна кривой. Обозначим $\dot{\rho}(s)=\alpha+(e-1)\vec{c}(s)$, $\vec{c}(s)=$ $=((\ddot{x}-\dot{x}),(\ddot{y}-\dot{y}))$; $\dot{\sigma}=\alpha+\vec{c}(s)$, $\vec{c}(s)=(\ddot{x},\ddot{y}-\dot{x}+\frac{1}{2}\ddot{x})$; $\dot{\delta}(s)=\alpha+(e-1)\vec{c}(s)$, $\vec{c}(s)=$ $=(\ddot{x}-\dot{x}+\frac{1}{e-1}(\ddot{y}-e\dot{y}),\ddot{y}-\dot{y})$. Значит, $\ddot{\omega}=\ \vec{c}(s)$, или $\ddot{\omega}\ =(e-1)\vec{c}(s)$, кривизна есть $k_1=\ \|\vec{c}(s)\|$. Еще обозначим $\dot{\vec{n}}=k_2\vec{b}$, здесь $\vec{b}$ – единичный вектор бинормали кривой, k_2 – кручение кривой, $k_2=\dfrac{\|\vec{c}\,'\times\vec{c}\,''\|}{{k_1}^2}$.

С точкой P кривой связан репер $(P,\tau,\vec{n},\vec{b})$. Для кривых ЕМ- и ЕД-пространств имеем формулы Френе: $\dot{\tau}=(e-1)k_1\vec{n}$, $\dot{\vec{n}}=k_2\vec{b}$, $\dot{\vec{b}}=-k_2\vec{n}$; для кривых ЕС-пространства: $\dot{\tau}=k_1\vec{n}$, $\dot{\vec{n}}=k_2\vec{b}$, $\dot{\vec{b}}=-k_2\vec{n}$.

§3. Специальная теория кривых

3.1. Редукция. Кривая $\dot{\omega}(s)=\alpha+\vec{c}(s)$ является кривой скорости для кривой $\omega(s)$. Обозначим $\dot{\omega}(s)=(1,p(s),q(s))$, и имеем кривую $\vec{c}(s)=(p(s),q(s))$ евклидовой плоскости. Для нее $\vec{v}=\vec{c}\,'(s)$ есть вектор скорости, $k^c\ =\ \dfrac{\|\vec{c}\,'\times\vec{c}\,''\|}{\|\vec{v}\|^3}$ – кривизна. Согласно п.2.2 для кривизны k_1 и кручения k_2 кривой $\omega(s)$ ВО-пространства получаем $k_1=\ \|\vec{v}\|\ =\ \sqrt{(p')^2+(q')^2}$; $k_2\ =\ \dfrac{p'q''-q'p''}{\|\vec{v}\|^2}$; $k^c\ =\ \dfrac{k_2}{k_1}$. Таким образом, зная $\|\vec{v}\|$ и k^c кривой $\vec{c}(s)$, вычисляем кривизну и кручение кривой $\omega(s)$ ВО-пространства: $k_1=\ \|\vec{v}\|$, $k_2=k^c\|\vec{v}\|$.

3.2. Кривая. По евклидовой кривой $\vec{c}(s)$ восстанавливается кривая $\omega(s)=(s,x(s),y(s))$ ВО-пространства. Согласно формулам производных функций $\dot{\rho}(s)$, $\dot{\sigma}(s)$, $\dot{\delta}(s)$, п.1.2, функции $x=x(s)$, $y=y(s)$ являются решениями следующих линейных уравнений: в ЕМ-пространстве $\dot{x}-x=p(s)$, $\dot{y}-y=q(s)$; в ЕС-пространстве $\dot{x} = p(s)$, $\dot{y} = q(s) - \frac{1}{2}p(s) + x$; в ЕД-пространстве $\dot{x} - x = = p(s) - \frac{1}{e-1}(\dot{y} - ey)$, $\dot{y} - y = q(s)$.

3.3. Кривые постоянных кривизн. Евклидова окружность $\vec{c}(s) = =(a\cos(ms+c), a\sin(am+c))$, имеющая кривизну $k^c = \frac{1}{a}$, определяет в каждом из ВО-пространств линию постоянных кривизн $k_1 = k$ и $k_2 = m$. Решая дифференциальные уравнения п. 3.2, находим функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ (ниже обозначено: $S = \sin(ms+c)$, $C = \cos(ms+c)$): в ЕМ-пространстве $x = C_1 + C_2 e^s + \frac{k}{m(1+m^2)}C - -\frac{k}{1+m^2}S$, $y = C_3 + C_4 e^s - -\frac{k}{1+m^2}C - \frac{k}{m(1+m^2)}S$ (такие кривые найдены другими методами в [5]); в ЕС-пространстве $x = -\frac{k}{m^2}C + C_1 s + C_2$, $y = \frac{k}{m^2}(-\frac{m+1}{m}S + +\frac{1}{2}C) + \frac{C_1}{2}s^2 + C_3 s + C_4$ и в ЕД-пространстве $y = C_1 + C_2 e^s - \frac{k}{1+m^2}C - -\frac{k}{m(1+m^2)}S$, $x = C_3 + C_4 e^s + AC + BS$, где $A = \frac{km(m(m^2+m+1)(e-1) + m^2 - e)}{(m^2+1)^2(e-1)}$, $B = \frac{km((m^2+m+1)(e-1) - m(m^2-e))}{(m^2+1)^2(e-1)}$.

Список литературы

1. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // ДАН СССР. 1977. №5. С.800 – 803.

2. *Скотт П.* Геометрии на трёхмерных многообразиях. М., 1986.

3. *Долгарев А.И.* Дифференцирование одулярных функций // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. Вип. 10. С. 57 – 79.

4. *Долгарев А.И.* Недифференцируемый одуль // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. №32. С. 34 – 37.

5. *Долгарев А.И.* ЕМ-пространства. Дис... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 1991.

A. Dolgarew

CURVES 3-DIMENSIONAL OF WEYL ODULAR SPACES AND CURVE EUCLIDEAN PLANE

The properties of curve solvable Weyl odular spaces of dimension 3 are circumscribed on the basis of a curve Euclidean plane. On a flat Euclidean curve of constant curvature the curves of constant curvature of odular spaces are found.