кальные расстояния соответствующих прямых пары **T** и пары дополнительных конгруэнций. В силу теоремы 7 прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые в их центрах и таким же свойством обладают пары **T** дополнительных конгруэнций. Рассматриваемые пары существуют с произволом одной функции одного аргумента.

Библиографический список

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар **T** конгруэнций // МГПИ им. В.И.Ленина. Деп. в ВИНИТИ, № 2993-80 Деп.

2. Фиников С.П. Теория конгруэнций. М.; Л., 1950.

3. Редозубова О.С. О симметричных парах **T** конгруэнций // Геометрия погруженных многообразий. М., 1981.

4. Редозубова О.С. Пары **T** конгруэнций, соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1992. Вып.23.

5. Редозубова О.С. Специальные пары **T** конгруэнций, у которых равны между собой произведения абсцисс фокусов // Там же, Калининград, 1993. Вып.24.

O.S. R e d o z u b o v a

SPECIAL PAIRS OF T-CONGRUENCES

The article represents concepts of the metric theory of special pairs T of congruences. The author uses the results which were obtained by him earlier. Theree were established connections between the separate parts of scientific results that were received by him in different years.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ $(CL)_{1,2}$

Е.В. С к р ы д л о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве продолжается исследование вырожденных конгруэнций $(CL)_{1,2}$, порожденных кривой второго порядка C, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию. Каждой прямой L конгруэнции $(CL)_{1,2}$ ставится в соответствие единственная коника C, полным прообразом которой является однопараметрическое семейтсво $(L)_C$ прямых L. В работах [1], [2] рассмотрены конгруэнции $(CL)_{1,2}$, в которых прямая L не принадлежит плоскости соответствующей ей коники C. Поэтому настоящая работа, дополняющая предыдущие, посвящается изучению тех конгруэнций $(CL)_{1,2}$, в которых коника C и прямая L пересекаются в двух различных точках. Семейство $(L)_C$ в этих условиях является плоским торсом. Изучен класс конгруэнций $(CL)_{1,2}$, в котором все коники C принадлежат одной инвариантной квадрике.

Конгруэнцию $(CL)_{1,2}$ отнесем к реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, вершины A_1 и A_2 которого совместим с точками пересечения прямой L с соответствующей ей коникой C, вершину A_3 поместим в полюс прямой L относительно коники C, а вершину A_0 выберем произвольно вне плоскости коники. Относительно такого репера R коника C задается уравнениями

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^0=0.$$

Коника C конгруэнции $(CL)_{1,2}$ описывает однопараметрическое семейство, а прямая L-конгруэнцию, следовательно

$$rang\{\omega_1^2,\omega_2^1,\omega_3^2-\omega_1^3,\omega_3^1-\omega_2^3,\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3,\omega_1^0,\omega_2^0,\omega_3^0\}=1, \quad (1)$$

$$rang\{\omega_1^0,\omega_2^0,\omega_1^3,\omega_2^3\}=2, \ (2)$$

где $\omega_{\overline{\alpha}}^{\overline{\beta}}(\overline{\alpha},\overline{\beta}=0,1,2,3)$ - линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства и условию эквипроективности.

Из равенств (1) и (2) очевидно, что формы $\omega_i^3 \overset{def}{=} \omega_i$ (*i*,*j*,*k*=1,2) являются линейно независимыми, поэтому их можно принять в качестве базисных форм конгруэнции $(CL)_{1,2}$. Исключая из рассмотрения случай, когда характеристика плоскости коники C проходит через точку A_3, получим $\omega_3^0\neq 0$. Система уравнений Пфаффа конгруэнции $(CL)_{1,2}$ тогда может быть записана в виде:

$$\omega_i^j=\Gamma_i^j\omega_3^0, \quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=p\omega_3^0, \quad \omega_3^i-\omega_j^3=c^i\omega_3^0; \quad (3)$$

$$\omega_i^0=t_i\omega_3^0, \quad \omega_3^0=\lambda^k\omega_k. \quad (4)$$

Здесь и далее *i*≠*j* и суммирование по этим индексам не производится.

Рассмотрим класс K конгруэнций $(CL)_{1,2}$, в котором все коники C принадлежат одной инвариантной квадрике Q. Уравнение квадрики Q относительно репера R может быть записано в виде:

$$F\equiv(x^3)^2-2x^1x^2+a_{00}(x^0)^2+2a_{0\alpha}x^0x^\alpha=0 \quad (\alpha=1,2,3),$$

а условие ее инвариантности dF=(...)F приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \omega_i^j=a_{0i}\omega_i^0, \quad \omega_3^i=\omega_j+a_{0j}\omega_3^0+a_{03}\omega_j^0, \\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a_{01}\omega_2^0+a_{02}\omega_1^0+2a_{03}\omega_3^0, \\ da_{00}+a_{00}(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_0^0)-a_{00}a_{01}\omega_2^0-a_{00}a_{02}\omega_1^0-2a_{0\alpha}\omega_0^\alpha=0, \\ da_{0i}+\omega_0^j+a_{0i}(\omega_j^j-\omega_0^0)-a_{0j}\omega_i^j-a_{00}\omega_i^0-a_{03}\omega_i^3- \\ -a_{0i}a_{0j}\omega_i^0-(a_{0i})^2\omega_j^0=0, \\ da_{03}-\omega_0^3-a_{0k}\omega_3^k-a_{00}\omega_3^0+a_{03}(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3)- \\ -a_{01}a_{03}\omega_2^0-a_{02}a_{03}\omega_1^0=0. \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (4), (5) определяет конгруэнцию K с произволом одной функции двух аргументов.

Завершим геометрическую фиксацию репера R, поместив его вершину A_0 в полюс плоскости коники C относительно квадрики Q, тогда $a_{0\alpha}$=0. Пронормируем вершины так, чтобы a_{00} =1. Уравнения (5) при этом примут вид:

$$\omega_i^j = 0,\ \ \omega_3^i = \omega_j,\ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0,\ \ \omega_0^0 = \omega_3^3 = 0,\ \ \omega_0^i = \omega_j^0,\ \ \omega_0^3 = -\omega_3^0. \tag{5^1}$$

Рассмотрим следующие точки: $F_1=t_2A_1-t_1A_2$ и $F_1=\lambda^1A_1+\lambda^2A_2$ – фокусы прямой L, описывающей конгруэнцию (L); $T= t_2A_1+t_1A_2-A_3$ – точку пересечения линии (A_0) с плоскостью коники C; $P_1= t_2A_1+t_1A_2$ – точку пересечения прямой TA_3 с прямой L; $P_2=\lambda^1A_1-\lambda^2A_2$ – точку пересечения с прямой L касательной к линии Γ_C, соответствующей на поверхности (A_3) торсу $(L)_C$.

Теорема 1. Пары точек F_1 и P_1, а также F_2 и P_2 гармонически разделяют вершины A_1 и A_2 репера R.

Доказательство следует из равенств $(F_1P_1;\ A_1A_2) = (F_2P_2;\ A_1A_2) = -1$.

Теорема 2. Конгруэнция (L) тогда и только тогда является параболической, когда параболической является конгруэнция (A_0A_3). Конгруэнция K, обладающая этим свойством существует и определяется с произволом трех функций одного аргумента. Линия Γ_C на поверхности (A_3) в этом случае является асимптотической.

Доказательство. Условие совпадения фокусов F_1 и F_2 прямой L, так же, как и условие совпадения фокусов прямой A_0A_3, имеет вид

$$t_1\lambda^1 + t_2\lambda^2 = 0, \tag{6}$$

т. е. конгруэнции (L) и (A_0A_3) одновременно являются параболическими. Если для конгруэнции K справедливо равенство (6), можно осуществить последнюю нормировку вершин репера R так, что $t_1 = t_2 \overset{def}{=} t$, тогда $\lambda^1 = -\lambda^2 \overset{def}{=} \lambda$. Уравнения (4) в силу этой нормировки примут вид:

$$\omega_i^0 = t\omega_3^0, \qquad \omega_3^0 = \lambda(\omega_1 - \omega_2), \tag{4^1}$$

откуда получим

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = a\omega_3^0. \tag{7}$$

Конгруэнция K с параболической конгруэнцией (L) определяется системой уравнений (4^1), (5^1), (7) с произволом трех функций одного аргумента. Асимптотические линии на поверхности (A_3) в этом случае задаются уравнением

$$(d\lambda + \lambda(\frac{1}{2}a\lambda + t)(\omega_1 + \omega_2))(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

т. е. одна из асимптотических соответствует торсу $(L)_C$ и значит совпадает с линией Γ_C.

Теорема 3. Фокусы F_1 и F_2 прямой L тогда и только тогда гармонически разделяют вершины A_1 и A_2 репера R, когда прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) односторонне расслояема к прямолинейной конгруэнции (L). Конгруэнция К, обладающая этим свойством, существует и определяется с произволом трех функций одного аргумента.

Доказательство. Условие гармоничности четырех точек F_1, F_2, A_1, A_2 выражается равенством

$$t_1\lambda^1 = t_2\lambda^2 = 0. \tag{8}$$

Условия одностороннего расслоения от конгруэнции (A_0A_3) к конгруэнции (L) записываются в виде:

$$\omega_3^k \wedge \omega_k^0 = 0, \quad \omega_0^k \wedge \omega_k^3 = 0, \quad \omega_0^k \wedge \omega_k^0 - \omega_3^k \wedge \omega_k^3 = 0.$$

Равенство (8) является необходимым и достаточным для тождественного удовлетворения этих условий в силу уравнений (4) и (5^1). В случае справедливости равенства (8) последнюю нормировку вершин репера R осуществим так, чтобы $t_1 = t_2 \overset{def}{=} t$. Тогда $\lambda^1 = \lambda^2 \overset{def}{=} \lambda$, и уравнения (4) примут вид:

$$\omega_i^0 = t\omega_3^0, \quad \omega_3^0 = \lambda(\omega_1 + \omega_2). \tag{4^{11}}$$

Из (4^{11}) следует

$$t(\omega_1^1 - \omega_2^2) + \omega_1 - \omega_2 = a\omega_3^0. \tag{9}$$

Конгруэнция К с гармонической четверкой F_1, F_2, A_1, A_2 определяется системой уравнений (4^{11}), (5^1), (9) с произволом трех функций одного аргумента.

Библиографический список

1. Скрыдлова Е.В. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1974. Вып. 5. С.141-158.
2. Скрыдлова Е.В. О вырожденных конгруэнциях, порожденных коникой и прямой // Там же, 1978. Вып. 9. С.85-92.

E. V. S k r y d l o v a

$(CL)_{1,2}$ -CONGRUENCES

The investigation of the degenerated congruences $(CL)_{1,2}$ generated by a second-order curve C describing a one-parameter family and by a line L describing the conguence (L) is continued in the three-dimensional projective space. To each line L of the congruence $(CL)_{1,2}$ the single conic is set, whose pre-image is the one-parametric family $(L)_c$ of lines L. Congruences $(CL)_{1,2}$ in which the line L does not belong to the plane of correspronding to it conic C were examined by the author earlier. Therefore the

present article which complement the previous one is devoted to the study of those constructions in which the conic C and the line L intersect in two different points. The family $(L)_c$, under these conditions, is a plane torse. The class of conguence $(CL)_{1,2}$ was also investigated, in which all the conics C belong to one invariant quadric.