

**С. А. Ишанов, С. В. Клевцур**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ  
ВЫСОТНО-ШИРОТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ  
ИОНОСФЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ**

106

*Рассмотрено влияние смешанных производных при трехмерном моделировании ионосферы разностными методами.*

*A mixed derivatives influence in during three-dimensional simulation of ionosphere by difference methods is considered.*

**Ключевые слова:** трехмерное моделирование, разностные методы, ионосфера, смешанные производные.

**Key words:** three-dimension simulation, difference methods, ionosphere, mixed derivatives.

В задачах моделирования ионосферной плазмы возникает необходимость отыскания периодических решений уравнения диффузии для различных компонент. Анизотропия среды и зависимость коэффициента диффузии от направления приводят к необходимости учета смешанных производных. Зафиксируем в трехмерном уравнении диффузии, записываемом в дивергентной форме в сферической системе координат в шаровом слое [1], географическую долготу, тогда получим двумерную нестационарную модель вида:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( p_{rr} \frac{\partial N_i}{\partial r} + p_r N_i \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( p_{\Theta\Theta} \frac{\partial N_i}{\partial \Theta} + p_{\Theta} N_i \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( p_{r\Theta} \frac{\partial N_i}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( p_{\Theta r} \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) + Q_i - \alpha_i N_i; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = S_{rr} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + S_r \frac{\partial u}{\partial r} + R_{\Theta\Theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + R_{\Theta} \frac{\partial u}{\partial \Theta} - W_u u + F_u; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = S_{rr} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + S_r \frac{\partial v}{\partial r} + R_{\Theta\Theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + R_{\Theta} \frac{\partial v}{\partial \Theta} - W_v v + F_v, \quad (3)$$

где  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) – концентрации ионов  $O^+, H^+, O_2^+, N_2^+, NO^+$  соответственно;  $u$  и  $v$  – меридиональные и зональные компоненты нейтрального ветра;  $Q_i$  – функция ионообразования;  $\alpha_i$  – скорость потерь ионов в результате химических реакций.

Коэффициенты, входящие в уравнения, имеют следующий вид:



$$S_{rr} = \frac{\eta}{\rho_n}; \quad S_r = \frac{2S_{rr}}{r}; \quad R_{\Theta\Theta} = \frac{S_{rr}}{r^2}; \quad R_{\lambda\lambda} = \frac{R_{\Theta\Theta}}{\sin^2 \Theta}; \quad R_{\Theta} = \frac{R_{\Theta\Theta}}{\operatorname{tg} \Theta} - \frac{u}{r};$$

$$W_u = R_{\lambda\lambda} + \frac{R_{ni\Theta}^{(2)}}{\rho_n}; \quad R_{\lambda} = -\frac{v}{r \sin \Theta}; \quad F_u = -\frac{v^2 \operatorname{ctg} \Theta}{r} + 2\Omega v \cos \Theta + \frac{R_{ni\Theta}^{(1)}}{\rho_n} - \frac{1}{r\rho_n} \frac{\partial P_n}{\partial \Theta};$$

$$W_v = R_{\lambda\lambda} + \frac{R_{ni\Theta}^{(2)}}{\rho_n} + \frac{u \operatorname{ctg} \Theta}{r}; \quad F_v = -2\Omega u \cos \Theta + \frac{R_{ni\lambda}^{(1)}}{\rho_n} - \frac{1}{r\rho_n \sin \Theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda}.$$

Здесь  $\rho_n$  – плотность нейтрального газа;  $P_n$  – давление;  $\eta$  – коэффициент вязкости;  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли;  $\bar{R}_{ni}$  – силы, возникающие за счет соударений нейтральных частиц с ионами.

Решение (1–3) ищем в области  $G = \{r \in [R_0, R_1], \Theta \in [\Theta_0, \Theta_1], \lambda = \text{const}\}$  при  $t \in [0, T]$ , в данном случае  $t$  имеет смысл местного (локального) времени (LT),  $\Gamma$  – граница области  $G$ . Дополним систему уравнений (1–3) начальными ( $t = 0$ ) и граничными ( $(r, \Theta) \in \Gamma$ ) условиями. Поскольку решение ищется в секторе, ограниченном коширонтами  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$ , то крайние условия на северной ( $\Theta = \Theta_0 = 20^\circ$ ) и южной ( $\Theta = \Theta_1 = 70^\circ$ ) границах получим как решения упрощенной системы уравнений (1–3), в которой дополнительно зафиксирована географическая широта  $\Theta$ :

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( p_{rr} \frac{\partial N_i}{\partial r} + p_r N_i \right) + Q_i - \alpha_i N_i; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = S_{rr} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + S_r \frac{\partial u}{\partial r} - W_u u + F_u; \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = S_{rr} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + S_r \frac{\partial v}{\partial r} - W_v v + F_v. \quad (6)$$

Система уравнений (1–3) совместно с соответствующими начальными и граничными условиями образует теоретическую нестационарную высотно-широтную модель ионосферы.

Разностные уравнения, аппроксимирующие систему (1–3), решались « $\alpha$ – $\beta$ » итерационным методом [3], а разностные уравнения, аппроксимирующие систему (4–6), решались методом прогонки. Как следует из анализа уравнений (1), член при старшей производной в горизонтальном направлении имеет второй порядок малости по  $r$ , и можно предположить, что он не дает существенного вклада в распределение заряженных частиц.

Однако члены при смешанных производных имеют первый порядок малости по  $r$  и, таким образом, горизонтальная неоднородность ионосферы проявляется в уравнениях непрерывности для ионов через смешанные производные. Для оценки их влияния численно решались системы (1–3) с учетом и без учета этих производных. Корректировка неточности задания начальных условий проводилась методом установления до выхода решения на периодический суточный режим.

На нижней границе по  $r$  ( $r = R_0$ ) задавались условия фотохимического равновесия ( $Q = \alpha N$ ). На верхней границе ( $R_1 = 600$  км) уравнение



непрерывности для ионов дополнялись заданием через нее потоков частиц, которые, в свою очередь, получались из расчетов по модели геомагнитной силовой трубки [2]. Потоки ионов на различных широтах получены путем интерполирования результатов расчетов для геомагнитных силовых трубок с параметрами Мак-Илвейна от  $L = 2,42$  до  $L = 4,95$  в узлы разностной сетки  $(r_i, \Theta_i)$ . Некоторые результаты численных расчетов представлены на рисунках 1–3.

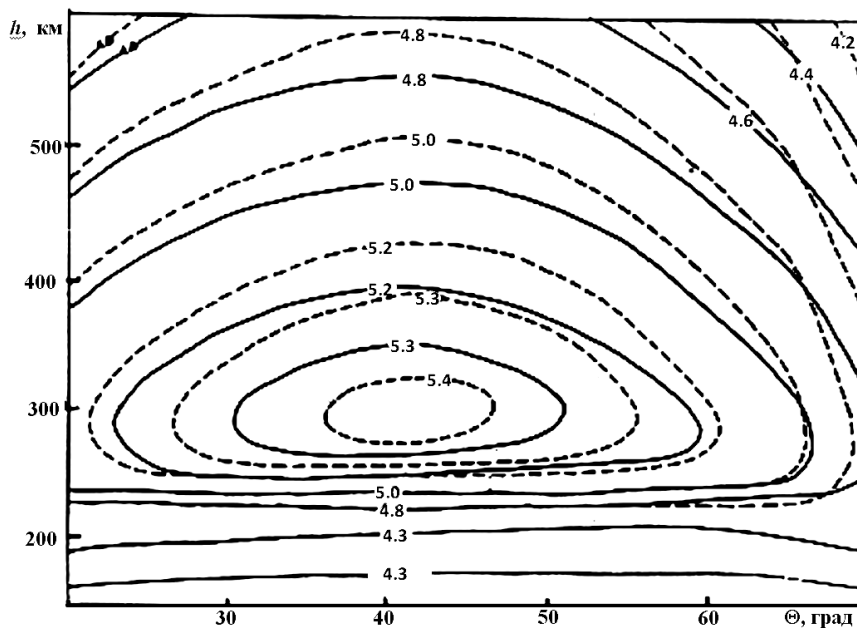


Рис. 1. Суточная вариация логарифма электронной концентрации на кошироте  $45^\circ$ . Сплошные кривые соответствуют расчету без учета смешанных производных, пунктирные – с их учетом.  
Зимний сезон,  $F_{10,7} = 150$ ,  $K_p = 3$

На рисунке 1 показаны высотно-временные вариации логарифма электронной концентрации по кошироте  $\Theta = 45^\circ$ . Сплошные кривые относятся к расчетам без учета в уравнениях непрерывности смешанных производных, а пунктирные – к расчетам с учетом этих производных. Сравнительный анализ полученных результатов показывает, что влияние смешанных производных наиболее существенно проявляется в восходно-заходный периоды суток на высотах свыше 250 км, то есть в тех пространственных областях, где доминируют процессы переноса. Смешанные производные в уравнениях непрерывности через ионное торможение оказывают влияние и на нейтральный ветер, однако это влияние малозначительно (менее 10 %).

На рисунке 2 показаны высотно-широтные вариации электронной концентрации в 00 ч LT (местного времени), то есть в то время, когда влияние смешанных производных наиболее значительно. Видно, что



влияние производных практически не проявляется ниже 250 км. В то же время расхождение значений концентрации ионов, полученных в двух вариантах расчетов, уменьшается к северной ( $\Theta_0 = 20^\circ$ ) и южной ( $\Theta_1 = 70^\circ$ ) границам области решения. Подобный эффект является результатом влияния краевых условий, которые, как уже отмечалось, задаются без учета горизонтальной неоднородности ионосферы. Данный факт служит свидетельством того, что кроме верхних граничных условий на электронную концентрацию в F-области могут влиять и другие краевые условия при многомерном моделировании ионосферы.

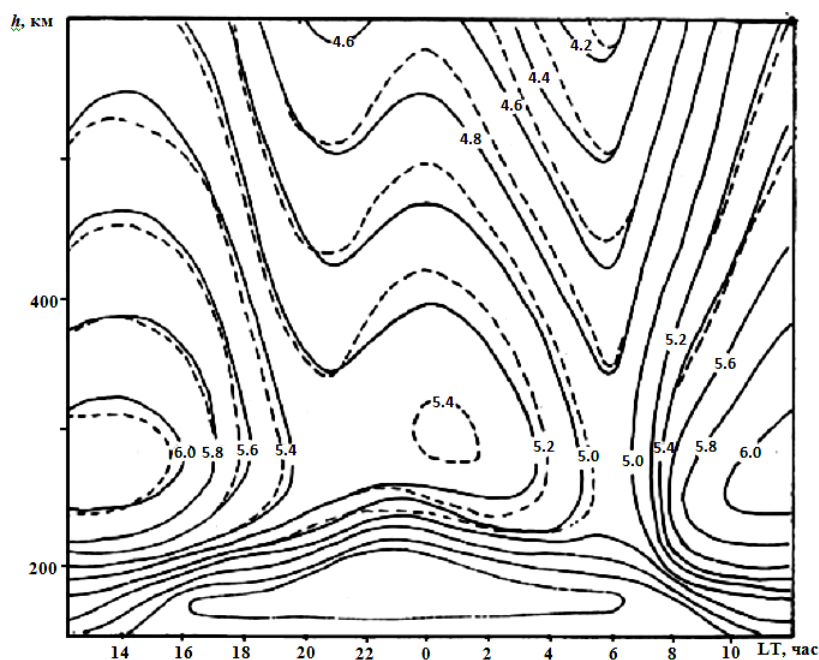


Рис. 2. Высотно-широтные изолинии логарифма электронной концентрации с учетом (пунктирные кривые) и без учета (сплошные кривые) смешанных производных в 00 ч LT. Зимний сезон,  $F_{10,7} = 150$ ,  $K_p = 0$

На рисунке 3 показано процентное относительное отклонение концентраций положительных ионов в максимуме F2-слоя, полученных в двух вариантах расчетов для некоторых коширот. Видно, что смешанные производные максимально проявляются на кошироте  $\Theta = 45^\circ$ , то есть в средней части области решения, в околополночные часы. Это позволяет сделать вывод о том, что при многомерном моделировании ионосферы необходимо сохранить смешанные производные по пространственным переменным в уравнениях диффузии ионов. Показано, что неучет может привести к 15%-ному отклонению в электронной концентрации F2-слоя ионосферы на средних широтах в околополночные часы. Влияние смешанных производных будет еще более значительным при моделировании ионосферных возмущений.

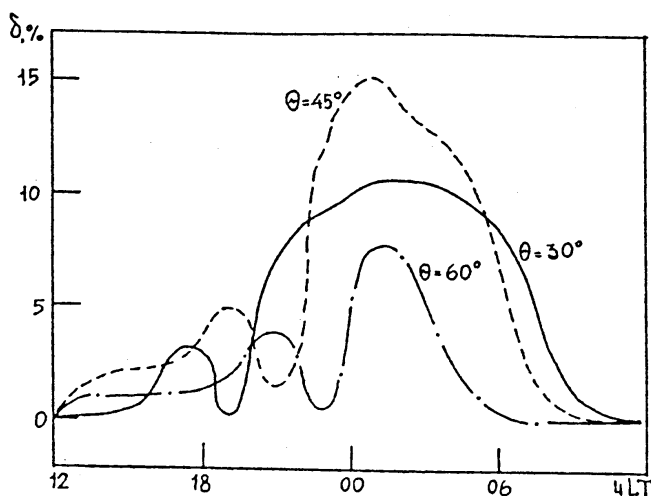


Рис. 3. Относительное процентное отклонение электронной концентрации в максимуме F2-слоя полученных в двух вариантах расчетов с учетом и без учета смешанных производных на некоторых коширотах (цифры у кривых)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проектам № 11-01-00098-а и № 11-01-00558-а.

#### Список литературы

1. Ишанов С. А., Клевцур С. В. Математическое моделирование ионосферы с учетом ее трехмерной неоднородности // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2010. Вып. 10. С. 152–158.
2. Латышев К. С., Зинин Л. В., Ишанов С. А. Математическое моделирование околоземной космической плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. 2008. Т. 7-1, ч. 3. С. 337–349.
3. Ишанов С. А., Клевцур С. В., Латышев К. С. Алгоритм  $\alpha$ - $\beta$  итераций в задачах моделирования ионосферной плазмы // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, №1. С. 33–45.

#### Об авторах

Сергей Александрович Ишанов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: math@dekan.albertina.ru.

Сергей Владимирович Клевцур — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

#### Authors

Dr. Sergey Ishanov — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: sergey.ishanov@yandex.ru.

Dr. Sergey Klevtsur — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University.