соиде Φ_1 задать произвольную линию Γ (линию центров эллипсов C).

Обозначим буквами : α -плоскости,касающиеся эллипсоида Φ_1 в точках линии Γ, β -прямые проходящие через центр O и пересекающие линию Γ .

Конгруэнцию Q_2 составляют однопараметрическое семейство эллипсов C ,являющихся линиями пересечения эллипсоида Φ плоскостями α, и конгруэнция прямых L ,касающихся эллипсоида Φ_2 в точках пересечения его с плоскостями α и пересекающих прямые β .

Соответствие между элементами многообразий (C) и (L) устанавливается следующим образом.Каждому эллипсу C соответствует однопараметрическое семейство $(L)_c$ прямых L ,касающихся эллипсоида Φ_2 в точках пересечения его с плоскостью α эллипса C и пересекающих прямую β ,проходящую через центр O и центр эллипса C .Обратно,пусть имеем прямую L ,касающуюся эллипсоида Φ_2 в некоторой точке M_o . Плоскость,инцидентная прямой L и центру O, пересекает линию Γ в некоторых точках $N_1,\dots,N_\kappa$.Проводим плоскость α, касательную к эллипсоиду Φ_1 и проходящую через точку M_o и одну из точек $N_1,\dots,N_\kappa$.Линия пересечения плоскости α с эллипсоидом Φ определит эллипс C ,соответствующий прямой L .

Список литературы

1 .Г р и н ц е в и ч ю с К. О линейных неголономных комплексах-"Литовский матем.сб.",1974,т.14

2 .Ф у н т и к о в а Т.П. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ -Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград, 1974,вып.4,с.107-117.

3.Ф у н т и к о в а Т.П. О некоторых классах вырожденных конгруэнций $(CL)_{1,2}$ -Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,1975,вып.6,с.205-212 .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7

1976

УДК 513.73

Е.А.Х л я п о в а

ИНВАРИАНТНЫЕ ОБРАЗЫ,АССОЦИИРОВАННЫЕ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В A_n.

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматриваются конгруэнции Ψ_{n-1} ($(n-1)$-мерные многообразия) центральных квадратичных элементов $\mathcal{F}$ [1].Аналитически строится инвариантная точка B ,не инцидентная гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$.Построены и геометрически охарактеризованы инвариантная прямая,не коллинеарная гиперплоскости α_{n-1}, и инвариантная точка,инцидентная этой гиперплоскости.

§1.Инвариантная точка B

Отнесем конгруэнцию Ψ_{n-1} к подвижному реперу $R^1=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$,начало A которого совмещено с центром квадратичного элемента $\mathcal{F}$,векторы $\bar{e}_i$ $(i,j,\kappa,\ell=1,\dots,n-1)$ расположены в его гиперплоскости,а вектор $\bar{e}_n$ — вне её.В репере R^1 уравнения квадратичного элемента $\mathcal{F}$ и замкнутая система уравнений Пфаффа конгруэнции Ψ_{n-1} запишутся соответственно в виде

$$a_{ij}x^i x^j-1=0\,,\quad x^n=0; \tag{1}$$

$$\omega^n=\Lambda^n_i\omega^i,\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{ij}\,\omega^j,\quad \theta_{ij}=\Lambda_{ij\kappa}\,\omega^\kappa; \tag{2}$$

где $\Delta\Lambda^n_i\wedge\omega^i=0,\ \Delta\Lambda^n_{ij}\wedge\omega^j=0,\ \Delta\Lambda_{ij\kappa}\wedge\omega^\kappa=0,$ (3)

$\omega^\alpha,\ \omega^\beta_\alpha$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера R^1,

$$\theta_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k ;$$

$$\Delta\Lambda_i = d\Lambda_i - \Lambda_j\omega_i^j + \Lambda_i^n\omega_n^n - \Lambda_j\Lambda_i^n\omega_n^j + \omega_i^n ;$$

$$\Delta\Lambda_{ij}^n = d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{kj}^n\omega_i^k - \Lambda_{ik}^n\omega_j^k + \Lambda_{ij}^n\omega_n^n - \Lambda_{ik}^n\Lambda_j^n\omega_n^k ;$$

$$\Delta\Lambda_{ijk} = d\Lambda_{ijk} - \Lambda_{ljk}\omega_i^l - \Lambda_{ilk}\omega_j^l - \Lambda_{ijl}\omega_k^l - \qquad (4)$$

$$-\Lambda_{ijl}\Lambda_k^n\omega_k^l - (a_{lj}\Lambda_{ik}^n + a_{il}\Lambda_{jk}^n)\omega_n^l ; \omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^{n-1}\neq 0.$$

Рассмотрим систему величин $\{\Lambda_{ij}^n\}$. Пусть $\det\|\Lambda_{ij}^n\|\neq 0$, Λ_n^{ij} -приведенные миноры элементов Λ_{ij}^n. Тогда $\Lambda_n^{ik}\Lambda_{jk}^n = \delta_j^i$, $\delta\Lambda_n^{ij} = -\Lambda_n^{kj}\pi_k^i - \Lambda_n^{ik}\pi_k^j + \Lambda_n^{ij}\pi_n^n - \Lambda_n^{ik}\Lambda_k^n\pi_n^j$.

Обозначим:

$$b_i = \Lambda_{ijk}\Lambda_n^{jk}, \quad b^i = a^{ij}b_j . \qquad (6)$$

Так как

$$\delta b_i = b_j\pi_i^j + a_{ji}\pi_n^j + n\cdot a_{ij}\pi_n^j + b_i\pi_n^n ,$$

$$\delta b^i = -b^j\pi_j^i + b^i\pi_n^n + (1+n)\pi_n^i ,$$

то система величин $\{b^i\}$ образует геометрический объект (квазитензор), который задает инвариантную точку B, не инцидентную гиперплоскости квадратичного элемента $\mathcal{F}$:

$$\bar{B} = \bar{A} + \bar{e}_n - \frac{1}{1+n}b^i\bar{e}_i .$$

§2. Оснащение поверхности центров

В общем случае касательная гиперплоскость гиперповерхности центров (A) не инцидентна гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$. Отнесем конгруэнцию Ψ_{n-1} к реперу $R^2=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, выделенному из репера R^1 условием компланарности векторов $\bar{e}_a$ $(a=2,\ldots,n)$ касательной гиперплоскости поверхности центров (A). Система пфаффовых уравнений конгруэнции Ψ_{n-1} в репере R^2 имеет вид:

$$\omega^1=0;\ \omega_1^a=\Lambda_{1b}^a\omega^b;\ \omega_i^n=\Lambda_{ia}^n\omega^a;\ \omega_a^1=\Lambda_{ab}\omega^b;\ \theta_{ij}=\Lambda_{ija}\omega^a, \qquad (7)$$

где

$$\omega^2\wedge\omega^3\wedge\ldots\wedge\omega^n\neq 0 ; \quad \Lambda_{ab}=\Lambda_{ba} .$$

Имеем:

$$\delta\Lambda_{ab} = \Lambda_{ac}\pi_b^c + \Lambda_{cb}\pi_a^c - \Lambda_{ab}\pi_1^1 . \qquad (8)$$

Дифференциальное уравнение гиперповерхности (A) запишется в виде

$$\omega^1=0. \qquad (9)$$

Асимптотическая форма гиперповерхности (A) имеет вид:

$$\Phi \equiv \omega^a\omega_a^1 = \Lambda_{ab}\omega^a\omega^b . \qquad (10)$$

Два направления ω^a и $\bar{\omega}^b$ на гиперповерхности (A) будут сопряжены, если

$$\Lambda_{ab}\omega^a\bar{\omega}^b = 0 . \qquad (11)$$

Пересечение касательной гиперплоскости гиперповерхности (A) и гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$ есть $(n-2)$ -мерная плоскость α_{n-2}, определяемая точкой A и векторами $\bar{e}_{\hat{a}}$ $(\hat{a}=2,\ldots,n-2)$.

Направление $\bar{l}$ на поверхности (A), сопряженное любому направлению, принадлежащему плоскости α_{n-2}, задается следующим образом:

$$\Lambda_{a\hat{b}}\omega^a = 0, \quad \omega^1=0 . \qquad (12)$$

Инвариантная прямая, проходящая через точку A и коллинеарная $\bar{l}$, определяется системой уравнений

$$\mathcal{F}_{\hat{b}} \equiv \Lambda_{a\hat{b}}x^a = 0, \quad x^1=0 . \qquad (13)$$

§3. Инвариантная точка гиперплоскости α_{n-1}

Отнесем конгруэнцию Ψ_{n-1} к реперу $R^3=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, выделенному из репера R^2 совмещением конца E_1 вектора $\bar{e}_1$ с характеристической точкой гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$.

В построенном репере конгруэнция Ψ_{n-1} определяется системой пфаффовых уравнений (7) и уравнениями

$$\omega_1^n = -\omega^n, \quad \omega_1^1 = \Lambda_{1a}^1 \omega^a. \tag{14}$$

Уравнения поляры β_{n-2} точки E_1 относительно квадратичного элемента $\mathcal{F}$ имеют вид:

$$a_{1i} x^i - 1 = 0, \quad x^n = 0. \tag{15}$$

Обозначим буквой Q_1 квадрику

$$a_{\hat{a}\hat{b}} x^{\hat{a}} x^{\hat{b}} - 1 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^n = 0, \tag{16}$$

полученную при пересечении квадратичного элемента $\mathcal{F}$ плоскостью α_{n-2}.

Сечение γ_{n-3} поляры β_{n-2} плоскостью α_{n-2} определяется уравнениями

$$a_{1\hat{a}} x^{\hat{a}} - 1 = 0, \quad x^1 = 0, \quad x^n = 0. \tag{17}$$

Полюс M плоскости γ_{n-3} относительно квадрики Q_1 задается формулой

$$\bar{M} = \bar{A} - a^{\hat{a}\hat{b}} a_{1\hat{b}} \bar{e}_{\hat{a}}. \tag{18}$$

Таким образом, построена инвариантная точка M гиперплоскости α_{n-1} квадратичного элемента $\mathcal{F}$.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. "Труды геом. семинара". М., ВИНИТИ, 1969, 2, 179-206.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Ю.И.Шевченко

СВЯЗНОСТИ В ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В проективном пространстве P_N рассмотрим тангенциально вырожденную поверхность $S_{n,m}$ как r-мерное многообразие ($r = n - m$) пар плоскостей (L_m, T_n), обладающее тем свойством, что плоскость L_m вместе со своей первой дифференциальной окрестностью принадлежит плоскости T_n. С тангенциально вырожденной поверхностью $S_{n,m}$ ассоциируется главное расслоение, базой которого является r-мерное многообразие плоских образующих L_m, а слоем-группа, действующая на паре плоскостей (L_m, T_n). Показано, что для задания связности в ассоциированном расслоении достаточно произвести обобщенную нормализацию тангенциально вырожденной поверхности $S_{n,m}$, т.е. к каждой образующей L_m присоединить: 1/нормаль 1-го рода - $(N-r)$-мерную плоскость P_{N-r}, пересекающую касательную плоскость T_n по образующей L_m; 2/нормаль 2-го рода - $(r-1)$-мерную плоскость P_{r-1}, принадлежащую касательной плоскости T_n и не имеющую общих точек с образующей L_m. Аналогичным образом рассмотрена нормально центрированная тангенциально вырожденная поверхность.

Отнесем N-мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{J'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами